

Cena 15,00 zł
(VAT 5%)

Indeks 371262
ISSN 0033-2372

GŁÓWNY URZĄD STATYSTYCZNY
STATISTICS POLAND

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 65

1

2018

100^{lat}  GUS

Informacje dla nadsyłających materiały do druku w *Przeglądzie Statystycznym*

1. *Przegląd Statystyczny* publikuje artykuły naukowe z zakresu statystyki, ekonometrii i innych dyscyplin stosujących metody ilościowe do badania zjawisk ekonomicznych. Nadsyłane prace powinny zawierać istotne przyczynki teoretyczne lub ciekawe zastosowania empiryczne. Szczególnie oczekiwane są artykuły związane z badaniami prowadzonymi w ramach realizacji projektów badawczych. Publikowane są ponadto recenzje książek, sprawozdania z życia naukowego środowiska statystyków i ekonometryków, a także opracowania zawierające oryginalne propozycje z zakresu dydaktyki statystyki i ekonometrii.
2. Artykuły są publikowane w języku polskim i angielskim. W tym drugim przypadku autor powinien nadesłać tekst angielski starannie opracowany pod względem językowym.
3. Maszynopis o objętości nie przekraczającej 20 stron (wraz z tabelami i wykresami; napisany z użyciem czcionki Times New Roman o wielkości 12 pkt, z odstępami 1,5 wiersza, z zachowaniem marginesów o wielkości 2,5 cm) powinien być składany poprzez platformę redakcyjną Czasopisma na stronie: <http://www.editorialsystem.com/pst/>
4. Cytowana literatura powinna być uporządkowana alfabetycznie (w tytułach w języku angielskim pierwsze litery wyrazu wielkie), np. Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. V. K., (2006), Multivariate GARCH Models: A Survey, *Journal of Applied Econometrics*, 21 (1), 79–110. Brockwell P. J., Davis R. A., (1996), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag, New York.
W tekście należy stosować przypisy harwardzkie. Na przykład:
Problem ten został omówiony w pracach Grangera (1969) oraz Brockwella i Davisa (1996). Zagadnienie to zostało przedstawione w wielu pracach (por. np. Granger, 1969; Brockwell i Davis, 1996; Bauwens i inni, 2006).
5. Jeżeli praca jest podzielona na części, powinny być one ponumerowane cyframi arabskimi. Należy stosować numerację ciągłą dla tabel i wykresów (oznaczane jako tabela 1, tabela 2, itd., rysunek 1, rysunek 2, itd.).
6. Do nadsyłanych artykułów należy dołączyć na końcu artykułu tytuł, streszczenie pracy (nie przekraczające 1/2 strony maszynopisu) oraz słowa kluczowe, wszystko w języku polskim i angielskim.
7. Prosimy też o podanie w odsyłaczu do nazwiska informacji o afiliacji autorów (nazwy instytucji, wydziału, katedry, adresu pocztowego) oraz adresu e-mail autora prowadzącego korespondencję. Jeżeli artykuł jest efektem realizacji projektu badawczego, to o fakcie tym należy poinformować w odsyłaczu do tytułu opracowania, podając numer i tytuł projektu.
8. Informujemy, że w procesie recenzowania nadsyłanych opracowań będzie zachowana podwójna anonimowość. W związku z tym, artykuł powinien być przesłany w wersji anonimowej, a wszelkie informacje identyfikacyjne powinny zostać usunięte.
9. Autorzy przyjętych do druku prac zobowiązani są nadesłać zeskanowane oświadczenia o oryginalności artykułu i wkładzie poszczególnych autorów w opracowanie publikacji oraz przeniesieniu autorskich praw majątkowych.
10. Zgłoszenie artykułu do *Przeglądu Statystycznego* oznacza, w przypadku przyjęcia artykułu do druku, zgodę autora na jego publikację na stronie internetowej Czasopisma oraz w bazach czasopism, w których uwzględniony jest *Przegląd Statystyczny*.
11. Opracowania nie odpowiadające podanym wymogom nie będą rozpatrywane.



GŁÓWNY URZĄD STATYSTYCZNY
STATISTICS POLAND

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 65

1

2018

WARSZAWA 2018

RADA PROGRAMOWA

Andrzej S. Barczak, Czesław Domański, Marek Gruszczyński, Krzysztof Jajuga (Przewodniczący),
Tadeusz Kufel, Igor G. Mantsurov, Jacek Osiewalski, D. Stephen G. Pollock, Jaroslav Ramík,
Dominik Rozkrut, Sven Schreiber, Peter Summers, Mirosław Szreder, Matti Virén, Aleksander Welfe,
Janusz Wywiół

KOMITET REDAKCYJNY

Magdalena Osińska (Redaktor Naczelny)
Marek Walesiak (Zastępca Redaktora Naczelnego, Redaktor Tematyczny)
Michał Majsterek (Redaktor Tematyczny)
Maciej Nowak (Redaktor Tematyczny)
Anna Pajor (Redaktor Statystyczny)
Piotr Fiszeder (Sekretarz Naukowy)

Strona www „Przegląd Statystyczny”:
<http://www.przeglądstatystyczny.pan.pl>

Informacje w sprawie sprzedaży czasopisma tel.: 22 608 32 10, 22 608 38 10

ISSN 0033-2372

Indeks 371262



Zakład Wydawnictw
Statystycznych

ZAKŁAD WYDAWNICTW STATYSTYCZNYCH
al. Niepodległości 208, 00-925 Warszawa, tel. 22 608 31 45.
Zbigniew Karpiński (redaktor techniczny), Katarzyna Szymańska (skład i łamanie)

OD REDAKCJI

Szanowni Państwo,

Mam przyjemność zakomunikować Państwu, że od 2018 roku wydawcą czasopisma Przegląd Statystyczny jest Główny Urząd Statystyczny w Warszawie. Fakt ten związany jest ze zmianą polityki wydawniczej Polskiej Akademii Nauk. Jednocześnie chciałam poinformować, że nadzór merytoryczny nad poziomem czasopisma nadal pełni środowisko naukowe reprezentowane przez Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN, Radę Programową oraz Komitet Redakcyjny czasopisma. Profil czasopisma i jego charakter pozostają zatem niezmienione. Zmieniła się natomiast szata graficzna, co z pewnością Państwo zauważą.

W związku z przewidywanymi zmianami, dotyczącymi oceny czasopism naukowych, Redakcja, w porozumieniu z Wydawcą, podjęła decyzję o istotnym zwiększeniu poziomu rozpoznawalności Przeglądu Statystycznego wśród czasopism o zasięgu międzynarodowym. Pierwszym wykonanym działaniem było złożenie wniosku w konkursie „Wsparcie dla czasopism naukowych” ogłoszonym przez MNiSW. Kolejnym, jest prośba kierowana do Autorów artykułów, aby nadsyłać prace przygotowane wyłącznie w języku angielskim. Oznacza to, że przyjęte do druku artykuły będą wydrukowane w takim języku, w jakim zostały nadesłane, jednak nowe prace będą przyjmowane do recenzji wyłącznie w języku angielskim. Miło mi poinformować Państwa, że w roku 2018 dwa pełne zeszyty czasopisma zostaną wydane w języku angielskim.

Przegląd Statystyczny posiada ogromną tradycję wśród polskich czasopism naukowych z dziedziny ekonometrii, statystyki, ekonomii matematycznej, badań operacyjnych i innych subdyscyplin obejmujących szeroko rozumiane metody ilościowe w ekonomii i ich oryginalne zastosowania. Cytowalność prac opublikowanych w czasopiśmie jest na bardzo wysokim poziomie. Nasze działania zmierzają ku temu, aby tę tradycję nie tylko podtrzymać, ale i rozwijać. O dalszych planach i działaniach będziemy informować na bieżąco. Liczymy na Państwa dalszą współpracę i zapraszamy do nadsyłania oryginalnych wyników badań.

Redaktor Naczelna
Prof. dr hab. Magdalena Osińska

SPIS TREŚCI

<i>Witold Orzeszko</i> – Wybrane aspekty nieparametrycznego prognozowania nieliniowych szeregów czasowych	7
<i>Dariusz Kacprzak</i> – Rozmyta metoda SAW z wagami uzyskanymi za pomocą rozmytej entropii	25
<i>Piotr Dudziński</i> – Wpływ czynników niematerialnych na popyt na ubezpieczenie i samoubezpieczenie majątkowe	41
<i>Waldemar Florczak, Wojciech Grabowski</i> – Co wpływa na wielkość popytu na porady prawne? Analiza logitowa z wykorzystaniem metody klasycznego uśredniania	55
<i>Daniel Kosiorowski, Jerzy P. Rydlewski, Zygmunt Zawadzki</i> – Wykrywanie funkcjonalnych obserwacji odstających na przykładzie monitorowania jakości powietrza	83
<i>Ivan Telega</i> – Czynniki zapotrzebowania materiałowego w krajach UE w latach 2000–2015	101
<i>Agnieszka Sompolska-Rzechuła, Małgorzata Machowska-Szewczyk</i> – Warunki życia w powiatach ziemskich województwa zachodniopomorskiego w latach 2002–2015 w świetle zmian demograficznych	117

SPRAWOZDANIA

<i>Krzysztof Jajuga, Barbara Pawełek, Marek Walesiak</i> – Sprawozdanie z XXVI Konferencji Naukowej nt. „Klasyfikacja i Analiza Danych – Teoria i Zastosowania”	139
<i>Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz</i> – Sprawozdanie z XVIII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej „Mikroekonometria w Teorii i Praktyce”	145

CONTENTS

<i>Witold Orzeszko</i> – Several Aspects of Nonparametric Prediction of Non-linear Time Series	7
<i>Dariusz Kacprzak</i> – The Fuzzy SAW Method and Weights Determined Based on Fuzzy Entropy	25
<i>Piotr Dudziński</i> – The Effect of Nonmonetary Factors on the Demand for Insurance and Self-Insurance	41
<i>Waldemar Florczak, Wojciech Grabowski</i> – What Influences Demand for Legal Aid? Logit Analysis with Use of Classical Model Averaging	55
<i>Daniel Kosiorowski, Jerzy P. Rydlewski, Zygmunt Zawadzki</i> – Functional Outliers Detection by the Example of Air Quality Monitoring	83
<i>Ivan Telega</i> – Factors of Material Consumption in EU Countries in 2000–2015	101
<i>Agnieszka Sompolska-Rzechuła, Małgorzata Machowska-Szewczyk</i> – Living Conditions in the Countries of the Zachodniopomorskie Voivodeship in the Years 2002–2015 in the Light of Demographic Changes	117

REPORTS

<i>Krzysztof Jajuga, Barbara Pawelek, Marek Walesiak</i> – "Classification and Data Analysis – Theory and Applications" – SKAD2017 Conference Report	139
<i>Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz</i> – Report of the XVIII National Scientific Conference "Microeconometrics in Theory and Practice"	145

Witold ORZESZKO¹

Wybrane aspekty nieparametrycznego prognozowania nieliniowych szeregów czasowych²

1. WPROWADZENIE

Jednym z podstawowych zadań ekonometrii jest budowa modeli regresji, opisujących mechanizmy kształtujące systemy gospodarcze. Ogólnie modele te mają postać:

$$Y = m(\mathbf{x}) + \varepsilon, \quad (1)$$

gdzie $m(\mathbf{x})$ jest wartością oczekiwaną zmiennej objaśnianej Y pod warunkiem wektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, będącego realizacją d -wymiarowego wektora zmiennych objaśniających $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ (tzn. $m(\mathbf{x}) = E(Y|\mathbf{X} = \mathbf{x})$), natomiast ε jest składnikiem losowym o zerowej warunkowej wartości oczekiwanej (tzn. $E(\varepsilon|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 0$) i wariancji $Var(\varepsilon|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \sigma^2(\mathbf{x})$ (Pagan, Ullah, 1999, s. 79–80).

W szczególnym przypadku zmienna Y może być objaśniana jej opóźnionymi wartościami, co prowadzi do modelu autoregresyjnego, postaci:

$$Y_t = m(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-d}) + \varepsilon_t \quad (2)$$

gdzie d jest rzędem autoregresji.

Generalnie rzecz ujmując, celem prognozowania na podstawie modelu regresji jest oszacowanie rozkładu predyktywnego zmiennej Y , określonego funkcją gęstości:

$$f(y|x) = \frac{g(x,y)}{h(x)}, \quad (3)$$

gdzie $g(x,y)$ oraz $h(x)$ są funkcjami gęstości, odpowiednio, wektorów (\mathbf{X}, Y) i \mathbf{X} (zob. np. Hyndman i inni, 1996; Racine, 2008; Kosiorowski, 2015). Zgod-

¹ Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Katedra Zastosowań Informatyki i Matematyki w Ekonomii, ul. Gagarina 13a, 87–100 Toruń, Polska, e-mail: witold.orzeszko@umk.pl.

² Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/11/B/HS4/00578.

nie ze wzorem (3) funkcję f szacuje się jako iloraz oszacowanych funkcji g i h . Jednak w zastosowaniach praktycznych przedmiotem zainteresowania nie musi być pełen rozkład predykcyjny, lecz jego wybrane charakterystyki, np. wartość oczekiwana lub wariancja. W takiej sytuacji konstrukcja modelu regresyjnego sprowadza się więc do oszacowania funkcji $m(\mathbf{x})$, a jeśli celem modelowania jest analiza zmienności – również funkcji $\sigma(\mathbf{x})$ (bowiem $Var(Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = Var(\varepsilon|\mathbf{X} = \mathbf{x})$).

Analizę regresji można uprościć, przyjmując *a priori* określoną postać analityczną (np. liniową) funkcji $m(\mathbf{x})$. Konstrukcja modelu sprowadza się wówczas do oszacowania jego parametrów, co oznacza, że model staje się parametryczny. Formalnie rzecz ujmując, model nazywa się parametrycznym, jeśli zależność między jego zmiennymi wyrażona jest w postaci funkcji o określonej postaci analitycznej, a ponadto przestrzeń parametrów charakteryzujących tę zależność jest skończenie wymiarowa. Oznacza to, że modele nieparametryczne nie mają określonej postaci analitycznej lub ich parametry strukturalne należą do przestrzeni nieskończenie wymiarowej (Fan, Yao, 2005, s. 9).

W regresji nieparametrycznej wyznaczenie funkcji $m(\mathbf{x})$ polega na jej aproksymacji funkcjami określonego typu, na tyle elastycznymi, aby dokładność aproksymacji poprawiała się wraz z liczbą obserwacji w próbie (Härdle i inni, 1997). Wyróżnia się w tym zakresie dwa podejścia: lokalne oraz globalne. Podejście lokalne polega na wyznaczeniu parametrów funkcji aproksymującej oddzielnie dla każdego argumentu \mathbf{x} , przy czym podczas estymacji wykorzystuje się wyłącznie wektory obserwacji z jego określonego sąsiedztwa. Promień analizowanego sąsiedztwa zależy od liczby obserwacji, tzn. im więcej obserwacji, tym mniejszy promień. Z kolei w metodach globalnych wykorzystuje się funkcje określonego typu, w których, w zależności od liczby posiadanych obserwacji, można zmieniać liczbę szacowanych parametrów, a w konsekwencji – dokładność aproksymacji. W metodach globalnych szacuje się więc jedną funkcję – wspólną dla wszystkich argumentów \mathbf{x} , a estymacja odbywa się przy wykorzystaniu wszystkich dostępnych wektorów obserwacji.

Zaletą regresji nieparametrycznej jest brak konieczności przyjmowania hipotetycznej postaci analitycznej modelu, przez co pozwala się danym „mówić same za siebie”, a otrzymane modele dzięki swojej elastyczności mogą dobrze dopasowywać się do danych. Ze względu na bogactwo i zróżnicowanie klasy funkcji nieliniowych własność ta wydaje się bardzo atrakcyjna szczególnie w przypadku modelowania zależności nieliniowych. Warto jednak dodać, że regresja nieparametryczna stanowi alternatywę dla regresji parametrycznej nie tylko w sytuacji modelowania systemów nieliniowych lub braku teorii ekonomicznej, wskazującej

określoną postać modelu parametrycznego, lecz także w przypadku (zob. np. Stelmach, 2014):

- obecności zakłóceń i błędów pomiarowych,
- występowania obserwacji wpływowych i odstających³,
- skorelowania zmiennych objaśniających,
- rozbieżności rozkładów zmiennych od rozkładu normalnego,
- zmiennej objaśnianej mierzonej na słabej skali.

Należy jednak dodać, że z opublikowanych w literaturze przedmiotu badań wynika, że modele nieparametryczne mimo dobrego dopasowania w próbie nie zawsze są dobrymi predyktorami (zob. np. Ramsey, 1996; Granger, Teräsvirta, 1992). Ponadto w porównaniu z modelami parametrycznymi są trudniejsze do interpretacji i formułowania wniosków na temat własności badanych systemów gospodarczych. Wadą regresji nieparametrycznej jest także konieczność posiadania znacznie większej liczby obserwacji. Zebrane dane muszą bowiem posłużyć do wyznaczenia funkcji aproksymacyjnej, a nie tylko do oszacowania jej parametrów. Stone (1982) wykazał, że dla ustalonego stopnia precyzji ε , liczba obserwacji n musi spełniać warunek:

$$n^{-\frac{1}{z+d}} < C\varepsilon, \quad (4)$$

gdzie C jest pewną stałą, zależną od typu rozkładu cechy i rodzaju zastosowanej metody (Stinchcombe, Drukker, 2013). Ze wzoru (4) wynika, że wzrost wymiaru d (tj. liczby modelowanych zmiennych) powoduje wykładniczy wzrost liczby obserwacji, potrzebnej do oszacowania funkcji regresji. Problem ten, noszący nazwę przekleństwa wymiarowości (ang. *curse of dimensionality*), jest tym większy, im ogólniejsza jest forma zależności w modelu. Z tego powodu rozważa się w literaturze przedmiotu modele nieparametryczne o postaci mniej ogólnej niż (1), które wypełniają lukę między modelem (1) a modelami parametrycznymi. Modele te, choć są mniej uniwersalne i elastyczne, mają jednak dużo mniejsze wymagania w zakresie liczby potrzebnych obserwacji. Alternatywnie, proponuje się również modele nazywane semiparametrycznymi, będące pewną kombinacją (np. sumą) ogólnego modelu nieparametrycznego (1) i określonych specyfikacji parametrycznych.

2. JĄDROWE ESTYMATORY FUNKCJI REGRESJI

Często stosowanym narzędziem estymacji modeli regresji nieparametrycznej jest Ważona Metoda Najmniejszych Kwadratów – WMNK, stanowiąca modyfikację Metody Najmniejszych Kwadratów. W WMNK minimalizacji podlega wyrażenie:

³ W dwóch pierwszych wymienionych przypadkach kluczowe znaczenie ma odporność wielu nieparametrycznych estymatorów funkcji regresji. Należy jednak podkreślić, że pojęcia regresji nieparametrycznej i regresji odpornej nie są tożsame. Dziękuję Recenzentowi za zwrócenie uwagi na tę kwestię.

$$\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})(y_i - m(\mathbf{x}))^2, \quad (5)$$

gdzie n jest liczbą obserwacji, y_i oraz \mathbf{x}_i (dla $i = 1, 2, \dots, n$) są realizacjami zmiennej Y oraz wektora losowego \mathbf{X} , natomiast $w_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$ są pewnymi wagami. Wagi konstruuje się w ten sposób by były nieujemne, sumowały się do jedności i były tym większe, im mniejsza jest odległość wektora obserwacji \mathbf{x}_i od argumentu \mathbf{x} (Pagan, Ullah, 1999, s. 84–85). Rozwiązaniem zadania minimalizacji (5) jest estymator:

$$\hat{m}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})y_i, \quad (6)$$

co oznacza, że oszacowana warunkowa wartość oczekiwana zmiennej Y jest średnią ważoną obserwacji $\{y_i\}$ z przyjętymi wagami $w_i(\mathbf{x})$ (por. Fan, Gijbels, 1992). Ponadto warto zauważyć, że estymator określony wzorem (6) jest lokalny, gdyż dla każdej wartości \mathbf{x} generowany jest inny zestaw wag i w konsekwencji otrzymuje się inny wektor oszacowań parametrów funkcji regresji.

Istotną grupą nieparametrycznych estymatorów funkcji regresji są estymatory jądrowe. Najpopularniejszym z nich jest estymator Nadarai-Watsona – ozn. N-W (Nadaraya, 1964; Watson, 1964). W przypadku jednowymiarowym, tzn. dla jednej zmiennej objaśniającej, estymator ten otrzymuje się w wyniku zastosowania Ważonej Metody Najmniejszych Kwadratów (5) dla wag:

$$w_i(x) = \frac{K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)} \quad (7)$$

i wyraża się wzorem:

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)}, \quad (8)$$

gdzie K jest funkcją jądrową, natomiast h – jej parametrem wygładzania. Funkcją jądrową jest dowolna nieujemna funkcja rzeczywista, spełniająca warunki (np. Racine, 2008):

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = 1, \quad (9)$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x)dx = 0, \quad (10)$$

$$3) K(x) = K(-x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R} \text{ (tzn. jest parzysta)}. \quad (11)$$

W praktyce za jądro przyjmuje się funkcję, która spełnia dodatkowy warunek o posiadaniu w $x_0 = 0$ maksimum globalnego (tzn. $K(0) \geq K(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$) (Śliwicki, 2016, s. 35). Dzięki temu największy wpływ na wartość $\hat{m}(x)$ mają te obserwacje y_i , dla których powiązane z nimi x_i są najmniej odległe od argumentu x . W praktyce najczęściej stosowanymi przykładami jąder są: gaussowskie, Epanecznikowa, dwuwagowe, trójkątne i Cauchy'ego (zob. np. Kulczycki, 2005, s. 65–67, 138; Orzeszko, 2016, s. 67–68).

W przypadku wielowymiarowym konstruuje się jądro produktowe κ , postaci (por. Śliwicki, 2016, s. 91):

$$\kappa(x) = \prod_{i=1}^d K(x_i), \quad (12)$$

co prowadzi do estymatora:

$$\hat{m}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_1 - x_{1i}}{h_1}\right) \cdot \dots \cdot K\left(\frac{x_d - x_{di}}{h_d}\right) y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_1 - x_{1i}}{h_1}\right) \cdot \dots \cdot K\left(\frac{x_d - x_{di}}{h_d}\right)}. \quad (13)$$

Można również zastosować jądro radialne (por. Śliwicki, 2016, s. 91–92):

$$\kappa(\mathbf{x}) = c \cdot K\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}\right), \quad (14)$$

co w efekcie daje:

$$\hat{m}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_{1i}}{h_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_d - x_{di}}{h_d}\right)^2}\right) y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_{1i}}{h_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_d - x_{di}}{h_d}\right)^2}\right)}. \quad (15)$$

Szczególnym przypadkiem regresji jądrowej jest Lokalna Jądrowa Regresja Liniowa (ozn. LJRL). Stanowi ona połączenie lokalnej aproksymacji liniowej i estymacji jądrowej, tzn. funkcję regresji $m(\mathbf{x})$ aproksymuje się lokalnie wielomianami stopnia pierwszego, których parametry szacuje się za pomocą Ważonej Metody Najmniejszych Kwadratów, przy czym wagi wyrażone są funkcją jądrową K . W przypadku jednowymiarowym wektor oszacowań parametrów $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ wielomianu aproksymującego znajduje się poprzez minimalizację wyrażenia:

$$\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) (y_i - \beta_0 - \beta_1(x_i - x))^2. \quad (16)$$

Rozwiązanie powyższego problemu minimalizującego ma postać (zob. Stone, 1977; Fan, Gijbels, 1992; Gajek, Kałuszka, 1996):

$$\hat{m}(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) y_i, \quad (17)$$

dla wag:

$$w_i(x) = \frac{K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) (\hat{s}_2(x) - (x-x_i)\hat{s}_1(x))}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) (\hat{s}_2(x) - (x-x_i)\hat{s}_1(x))}, \quad (18)$$

gdzie

$$\hat{s}_r(x) = \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) (x-x_i)^r \quad \text{dla } r = 1, 2. \quad (19)$$

Estymator $\hat{m}(x)$ wyrażony wzorami (17)–(19) nosi nazwę estymatora Stone'a-Fana (np. Gajek, Kałuszka, 1996). Warto dodać, że estymator Nadarai-Watsona jest szczególnym przypadkiem estymatora Stone'a-Fana, gdyż można go potraktować jako rozwiązanie problemu minimalizacji:

$$\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) (y_i - \beta_0)^2, \quad (20)$$

czyli problemu mniej ogólnego w stosunku do (16).

W przypadku estymatorów Nadarai-Watsona, Stone'a-Fana i innych lokalnie liniowych funkcji wygładzających (ang. *local linear smoothers*) postaci (6), dla punktów należących do wnętrza nośnika danych (tj. oddalonych od jego brzegu) obciążenie estymatora jest proporcjonalne do h^2 , natomiast wariancja, opisująca tempo zbieżności do teoretycznej funkcji regresji, jest rzędu $(nh^d)^{-1}$ (zob. np. Stinchcombe, Drukker, 2013), tzn.:

$$E(\hat{m}(x)) - m(x) = O(h^d) \quad (21)$$

oraz:

$$\text{Var}(\hat{m}(x)) = O((nh^d)^{-1}). \quad (22)$$

Oznacza to, że przy wyborze parametru h konieczny jest wybór (ang. *trade-off*) między obciążeniem i wariancją.

3. SYMULACJE MONTE CARLO

Celem symulacji Monte Carlo jest ocena efektywności jądrowych estymatorów modeli regresji, tj. estymatora Nadarai-Watsona oraz Lokalnej Jądrowej Regresji Liniowej jako narzędzi prognozowania nieliniowych szeregów czasowych oraz porównanie ich z innymi metodami prognozowania. W badaniu rozważono 20 autoregresyjnych procesów generujących dane (ang. *data generating processes* – DGP)⁴:

$$\text{DGP 1: } Y_t = 4Y_{t-1}(1 - Y_{t-1});$$

$$\text{DGP 2: } Y_t = X_t + \sigma\varepsilon_t; \text{ gdzie } X_t \text{ został wygenerowany z DGP 1, } \sigma = 0,5\sigma_Y;$$

$$\text{DGP 3: } Y_t = X_t + \sigma\varepsilon_t; \text{ gdzie } X_t \text{ został wygenerowany z DGP 1, } \sigma = \sigma_Y;$$

$$\text{DGP 4: } Y_t = 1 + 0,3Y_{t-2} - 1,4Y_{t-1}^2;$$

$$\text{DGP 5: } Y_t = X_t + \sigma\varepsilon_t; \text{ gdzie } X_t \text{ został wygenerowany z DGP 4, } \sigma = 0,5\sigma_Y;$$

$$\text{DGP 6: } Y_t = X_t + \sigma\varepsilon_t; \text{ gdzie } X_t \text{ został wygenerowany z DGP 4, } \sigma = \sigma_Y;$$

$$\text{DGP 7: } Y_t = 0,3Y_{t-1} + \varepsilon_t;$$

$$\text{DGP 8: } Y_t = 0,8Y_{t-1} + 0,15Y_{t-2} + \varepsilon_t + 0,3\varepsilon_{t-1};$$

$$\text{DGP 9: } Y_t = \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}^2;$$

$$\text{DGP 10: } Y_t = \varepsilon_t + 0,6\varepsilon_{t-1}^2 + 0,6\varepsilon_{t-2}^2;$$

$$\text{DGP 11: } Y_t = \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2};$$

$$\text{DGP 12: } Y_t = 0,8|Y_{t-1}|^{0,5} + \varepsilon_t;$$

$$\text{DGP 13: } Y_t = \text{sign}(Y_{t-1}) + \varepsilon_t, \text{ gdzie } \text{sign} \text{ jest funkcją znaku};$$

$$\text{DGP 14: } Y_t = 0,6\varepsilon_{t-1}Y_{t-2} + \varepsilon_t;$$

$$\text{DGP 15: } Y_t = -0,015 - 0,3Y_{t-1} + 0,01Y_{t-1}(1 + \exp(-3Y_{t-1}^2)) + \varepsilon_t;$$

$$\text{DGP 16: } Y_t = \begin{cases} -0,5Y_{t-1} + \varepsilon_t, & Y_{t-1} < 1, \\ 0,4Y_{t-1} + \varepsilon_t, & Y_{t-1} \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{DGP 17: } Y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad h_t = 1 + 0,4Y_{t-1}^2;$$

$$\text{DGP 18: } Y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad h_t = 0,01 + 0,8Y_{t-1} + 0,15Y_{t-1}^2;$$

$$\text{DGP 19: } Y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \ln h_t = 0,1 + 0,95\ln h_{t-1} + \sqrt{0,009}\eta_t; \quad \eta_t \sim \text{i.i.d. } N(0,1);$$

$$\text{DGP 20: } Y_t = 1 + 10h_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t}Z_t, \quad h_t = 0,001 + 0,85h_{t-1} + 0,1\varepsilon_{t-1}^2.$$

Zastosowane procesy były przedmiotem badań symulacyjnych w pracach: Granger, Lin, 1994; Brock i inni, 1996; Granger i inni, 2004; Hong, White, 2005; Osińska, Górka, 2006; Diks, Panchenko, 2007; Orzeszko, 2016; Orzeszko, 2017. Należą one do klas modeli o dużym znaczeniu w analizie procesów ekonomicznych i finansowych (zob. np. Granger, Teräsvirta, 1993; LeBaron, 1994; Markellos, 2002; Orzeszko, 2005; Bruzda, 2007; Morley, 2009; Orzeszko, 2016 i zawarte w nich odnośniki do literatury).

Pierwszych sześć procesów generujących to odwzorowania chaotyczne: logistyczne i Henona – bez szumu i z dodanym szumem obserwacyjnym. Systemy chaotyczne są przykładem deterministycznych systemów nieliniowych o skompli-

⁴ W każdym z poniższych modeli $\{\varepsilon_t\}$ jest procesem i.i.d. o rozkładzie $N(0,1)$.

kowanej, pozornie losowej dynamice (por. np. Orzeszko, 2005). DGP 1 i DGP 4 to, odpowiednio, odwzorowanie logistyczne i Henona. Procesy 2, 3, 5, 6, to przykłady chaosu z szumem, otrzymane w wyniku dodania do szeregów chaotycznych, wygenerowanych z DGP 1 i DGP 4 obserwacyjnego szumu losowego o dwóch poziomach.⁵ Procesy DGP 7 i DGP 8 są liniowe – DGP 7 to model autoregresyjny (AR), a DGP 8 to autoregresyjny model średniej ruchomej (ARMA). DGP 9, 10, 11 są przykładami nieliniowych modeli średniej ruchomej (NMA), natomiast DGP 12 i 13 to nieliniowe modele autoregresyjne (NAR). DGP 14 jest modelem dwuliniowym (BL), DGP 15 – wykładniczym modelem autoregresyjnym (EXPAR), a DGP 16 – progowym modelem autoregresyjnym (SETAR). Kolejne trzy procesy są nieliniowe w wariancji: DGP 17 to model autoregresyjny z warunkową heteroskedastycznością (ARCH), DGP 18 to uogólniony model ARCH (GARCH), a DGP 19 to model zmienności stochastycznej (SV). Z kolei DGP 20 to model GARCH-M, będący przykładem procesu nieliniowego zarówno w zakresie średniej, jak i wariancji.

Z każdego rozważonego procesu wygenerowano po 1000 replikacji złożonych z $n = 50$ obserwacji („szeregi krótkie”), $n = 300$ obserwacji („szeregi średnie”) oraz $n = 1000$ obserwacji („szeregi długie”).⁶ Dla każdej replikacji prognozowaniu poddano ostatnią obserwację y_n . Do oceny trafności prognoz zastosowano średni bezwzględny błąd prognozy (MAE), obliczony na podstawie wszystkich 1000 replikacji.

Do wyznaczenia prognoz zastosowano siedem metod prognozowania. Trzy z nich to modele regresji: estymator N-W, LJRL oraz model regresji liniowej. W modelach tych prognoza y_n^* wyznaczana była na podstawie poprzedzającej obserwacji, zgodnie z modelem (2), gdzie $d = 1$, tj. $y_n^* = \hat{m}(y_{n-1})$, przy czym do estymacji funkcji m wykorzystano obserwacje ze wszystkich okresów poprzedzających, tj. y_1, y_2, \dots, y_{n-1} . W obu metodach jądrowych zastosowano jądro gaussowskie, postaci:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (23)$$

a parametr wygładzania wyznaczono z formuły:

$$h = \left(\frac{4}{3(n-1)} \right)^{0,2} \frac{Me(|y_i - Me(y)|)}{0,6745}, \quad (24)$$

gdzie Me oznacza medianę z próby (Bowman, Azzalini, 1997, s. 31).

⁵ W przypadku DGP 2 i DGP 5 wartość wskaźnika SNR (ang. *signal-to-noise ratio*) wynosi 2, natomiast w przypadku DGP 3 i DGP 6 wartość ta wynosi 1. W obu sytuacjach dodany szum losowy należy uznać za silny (por. Rosenstein i inni, 1993).

⁶ W celu wyeliminowania wpływu wartości początkowych wygenerowano szeregi złożone z, odpowiednio, 750, 1000 i 1700 obserwacji, a następnie odrzucono pierwszych 700 obserwacji. Szeregi krótkie stanowią początek szeregów średnich, a te z kolei – początek szeregów długich.

Wśród pozostałych czterech metod prognozowania znalazły się dwie metody naiwne. W pierwszej z nich (ozn. naiwna1) prognozę wyznaczono ze wzoru:

$$y_n^* = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} y_t}{n-1}, \quad (25)$$

natomiast w drugiej (ozn. naiwna2) – zgodnie z formułą:

$$y_n^* = y_{n-1}. \quad (26)$$

Pierwsza z zastosowanych metod naiwnych jest zgodna z modelem białego szumu, natomiast druga – z modelem błędzenia przypadkowego.

Ponadto zastosowano dwie metody cechujące się wysoką efektywnością prognozowania chaotycznych szeregów czasowych (zob. Orzeszko, 2004a) – metodę Najbliższych Sąsiadów oraz Lokalną Aproksymację Liniową. Punktem wyjścia obu metod jest rekonstrukcja przestrzeni stanów, która, zgodnie z tw. Takensa o zanurzaniu (Takens, 1981), polega na konstrukcji p -wymiarowych wektorów opóźnień postaci:

$$\hat{y}_t^p = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-(p-1)}), \quad (27)$$

gdzie parametr p nazywany jest wymiarem zanurzenia. W metodzie Najbliższych Sąsiadów (ozn. NS) wyznacza się spośród wszystkich wektorów opóźnień k najbliższych (w sensie zadanej p -wymiarowej metryki) sąsiadów wektora \hat{y}_{n-1}^p . Niech $\hat{y}_{t_1}^p, \hat{y}_{t_2}^p, \dots, \hat{y}_{t_k}^p$ będą wyznaczonymi najbliższymi sąsiadami. Według metody, prognozą y_n^* jest średnia ważona obserwacji $\{y_{t_1+1}, y_{t_2+1}, \dots, y_{t_k+1}\}$, z wagami dobranymi tak, by bliżsi sąsiedzi mieli na nią większy wpływ:

$$y_n^* = \sum_{i=1}^k w(\|\hat{y}_{n-1}^p - \hat{y}_{t_i}^p\|) \cdot y_{t_i+1}, \quad (28)$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza dowolną, przyjętą normę w \mathbb{R}^p , natomiast $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją malejącą spełniającą warunki:

$$w(\|\hat{y}_{n-1}^p - \hat{y}_{t_i}^p\|) > 0, \text{ dla każdego } i = 1, 2, \dots, k, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^k w(\|\hat{y}_{n-1}^p - \hat{y}_{t_i}^p\|) = 1. \quad (30)$$

W przeprowadzonym badaniu przyjęto wagi wykładnicze (Finkenstädt, Kuhbier, 1995) postaci:

$$w(\|\hat{y}_{n-1}^p - \hat{y}_{t_i}^p\|) = \frac{e^{-\|\hat{y}_{n-1}^p - \hat{y}_{t_i}^p\|}}{\sum_{i=1}^k e^{-\|\hat{y}_{n-1}^p - \hat{y}_{t_i}^p\|}} \quad (31)$$

W metodzie Lokalnej Aproksymacji Liniowej (ozn. LA) prognozę wyznacza się ze wzoru:

$$y_n^* = g(\hat{y}_{n-1}^p), \quad (32)$$

przy czym funkcję g aproksymuje się funkcją liniową, tj.:

$$g(\hat{y}_{n-1}^p) \approx \alpha_0 + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \dots + \alpha_p y_{n-p}. \quad (33)$$

„Lokalność” metody polega na tym, że estymacja parametrów strukturalnych α_i dokonywana jest Metodą Najmniejszych Kwadratów na podstawie jedynie najbliższych sąsiadów \hat{y}_{n-1}^p , czyli wektorów $\hat{y}_{t_1}^p, \hat{y}_{t_2}^p, \dots, \hat{y}_{t_k}^p$.

Jak widać, zarówno metoda Najbliższych Sąsiadów, jak i Lokalna Aproksymacja Liniowa wymagają przyjęcia *a priori* wartości dwóch parametrów – wymiaru zanurzenia p i liczby najbliższych sąsiadów k . Na podstawie wyników zaprezentowanych przez Orzeszko (2004b) do wyboru odpowiednich wartości tych parametrów zastosowano w badaniu procedurę, polegającą na analizie dokładności prognoz wygasłych. W tym celu dla każdego procesu generującego wybrano po jednym z szeregów krótkich, średnich oraz długich. Następnie dla każdego szeregu obliczono średni bezwzględny błąd prognozy (MAE) dla pięciu obserwacji poprzedzających okres prognozowany (tj. dla y_{n-1}, \dots, y_{n-5}), przyjmując kolejno wartości $p = 1, 2, \dots, 15$ oraz $k = 1, 2, \dots, n - p + 1$. Ostatecznie dla każdego szeregu czasowego wybrano wartości parametrów minimalizujące błąd prognozy. Wybrane wartości zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. WARTOŚCI PARAMETRÓW MINIMALIZUJĄCE BŁĄD PROGNOZY W METODACH NS i LA

DGP	Długość szeregu	NS		LA	
		p	k	p	k
DGP 1 logist	krótkie	1	2	1	3
	średnie	1	7	2	4
	długie	1	3	2	4
DGP 2 logist+0,5	krótkie	14	1	2	6
	średnie	3	1	9	14
	długie	3	2	14	21
DGP 3 logist+1	krótkie	9	3	5	15
	średnie	1	2	7	10
	długie	5	1	14	52
DGP 4 Henon	krótkie	2	2	3	5
	średnie	2	3	3	5
	długie	4	2	4	6

Tabela 1. WARTOŚCI PARAMETRÓW MINIMALIZUJĄCE BŁĄD PROGNOZY
W METODACH NS I LA (dok.)

DGP	Długość szeregu	NS		LA	
		p	k	p	k
DGP 5 Henon+0,5	krótkie	4	39	6	12
	średnie	3	5	6	17
	długie	6	5	14	25
DGP 6 Henon+1	krótkie	3	1	5	15
	średnie	2	11	2	5
	długie	10	3	8	19
DGP 7 AR	krótkie	1	2	1	3
	średnie	2	3	2	21
	długie	2	3	7	17
DGP 8 ARMA	krótkie	1	2	4	8
	średnie	14	3	12	35
	długie	1	5	8	22
DGP 9 NMA	krótkie	15	1	14	24
	średnie	4	23	2	23
	długie	8	1	15	19
DGP 10 NMA	krótkie	5	7	5	7
	średnie	4	1	2	22
	długie	2	1	5	43
DGP 11 NMA	krótkie	5	1	7	10
	średnie	1	43	1	42
	długie	4	1	5	11
DGP 12 NAR	krótkie	6	2	2	4
	średnie	3	10	9	12
	długie	1	2	7	11
DGP 13 NAR	krótkie	11	5	7	24
	średnie	2	9	1	62
	długie	2	3	2	10
DGP 14 BL	krótkie	5	1	7	11
	średnie	2	15	3	33
	długie	6	3	5	13
DGP 15 EXPAR	krótkie	1	3	1	3
	średnie	7	1	2	63
	długie	8	2	12	16
DGP 16 SETAR	krótkie	14	3	11	14
	średnie	2	56	3	15
	długie	5	4	7	11
DGP 17 ARCH	krótkie	13	2	6	9
	średnie	6	2	2	59
	długie	5	7	2	7
DGP 18 GARCH	krótkie	4	3	7	10
	średnie	6	2	1	106
	długie	3	2	2	6
DGP 19 SV	krótkie	1	3	15	20
	średnie	2	1	11	78
	długie	9	5	1	13
DGP 20 GARCH-M	krótkie	11	1	7	33
	średnie	6	12	6	12
	długie	11	4	10	12

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 2 zaprezentowano wyniki prognozowania rozważonych procesów generujących z podziałem na szeregi o różnych długościach.⁷ W każdej komórce podano błąd prognozy, wyróżniając pogrubioną czcionką wartość najmniejszą.

Tabela 2. BEZWZGLĘDNE BŁĘDY PROGNOZ DLA BADANYCH DGP

DGP	Długość szeregu	Naiwna1	Naiwna2	Regresja liniowa	N-W	LJRL	NS	LA
DGP 1 logist	krótkie	0,3165	0,4013	0,3192	0,2079	0,1230	0,0212	0,0021
	średnie	0,3109	0,4057	0,3116	0,1523	0,0750	0,0050	7E-06
	dłgie	0,3171	0,4192	0,3173	0,1170	0,0520	0,0012	2E-07
DGP 2 logist+0,5	krótkie	0,9530	1,3044	0,9611	0,8126	0,7955	1,2858	0,9504
	średnie	0,9608	1,3132	0,9619	0,7973	0,7840	1,0020	1,4343
	dłgie	0,9490	1,2960	0,9499	0,7656	0,7581	0,8690	1,4708
DGP 3 logist+1	krótkie	1,1550	1,6270	1,1684	1,1460	1,1851	1,3342	1,5208
	średnie	1,1858	1,6573	1,1883	1,1630	1,1645	1,3723	2,0052
	dłgie	1,1343	1,6140	1,1351	1,1081	1,1106	1,5383	1,3493
DGP 4 Henon	krótkie	0,6235	1,0252	0,5920	0,3272	0,2144	0,1030	0,0743
	średnie	0,6129	0,9730	0,5883	0,2512	0,1918	0,0266	0,0017
	dłgie	0,6069	0,9575	0,5839	0,2214	0,1806	0,0171	0,0002
DGP 5 Henon+0,5	krótkie	0,9363	1,5231	0,9058	0,7785	0,7638	0,8412	1,1190
	średnie	0,9116	1,4210	0,8933	0,7249	0,7178	0,6868	0,7920
	dłgie	0,8837	1,4225	0,8628	0,7232	0,7246	0,6528	1,0463
DGP 6 Henon+1	krótkie	1,1548	1,7930	1,1563	1,1453	1,1738	1,4864	1,4531
	średnie	1,1145	1,6948	1,1168	1,0844	1,0835	1,1090	1,3623
	dłgie	1,0906	1,7079	1,0804	1,0632	1,0667	1,2148	1,3111
DGP 7 AR	krótkie	0,8615	0,9910	0,8266	0,8340	0,8686	0,9515	1,3065
	średnie	0,8534	1,0097	0,8145	0,8200	0,8299	0,9547	0,8445
	dłgie	0,8468	0,9996	0,7967	0,8006	0,8012	0,9401	0,9934
DGP 8 ARMA	krótkie	2,6490	0,8248	0,8544	1,0208	0,9471	1,0341	1,4033
	średnie	3,0816	0,8295	0,8253	0,8999	0,8447	1,0788	0,9994
	dłgie	3,1700	0,8076	0,8061	0,8640	0,8102	0,8973	0,9796
DGP 9 NMA	krótkie	1,1965	1,5839	1,2052	1,1391	1,2494	1,7248	2,1152
	średnie	1,1613	1,5154	1,1637	1,0479	1,0574	1,0923	1,0623
	dłgie	1,1336	1,5236	1,1338	1,0350	1,0538	1,2230	2,9258
DGP 10 NMA	krótkie	1,2731	1,4127	1,2310	1,1736	1,2455	1,2666	2,9759
	średnie	1,2128	1,3942	1,1904	1,1011	1,0625	1,4653	1,0512
	dłgie	1,1426	1,3589	1,1002	1,0190	1,0246	1,4097	1,0255
DGP 11 NMA	krótkie	0,9978	1,3640	1,0177	1,0295	1,1040	1,2971	2,5605
	średnie	1,0090	1,3620	1,0090	1,0225	1,1089	1,0202	1,0320
	dłgie	1,0276	1,4263	1,0255	1,0398	1,0514	1,2864	1,1522
DGP 12 NAR	krótkie	0,8596	1,0379	0,8458	0,8338	0,8522	1,0102	1,5111
	średnie	0,8571	1,0506	0,8360	0,8222	0,8280	0,8568	2,1773
	dłgie	0,8321	1,0538	0,8151	0,8032	0,8040	0,9716	1,3517
DGP 13 NAR	krótkie	1,1840	1,0300	0,9484	0,8980	0,9325	1,0576	1,1467
	średnie	1,1685	1,0223	0,9125	0,8525	0,8525	0,8814	0,8390
	dłgie	1,1873	1,0389	0,9154	0,8178	0,8202	0,9324	0,9072

⁷ Obliczenia wykonano przy zastosowaniu własnych kodów komputerowych, napisanych w środowisku Matlab oraz w Visual Basic for Applications. W przypadku metod jądrowych wykorzystano funkcje ksr i ksrLin, stworzone przez Yi Cao (Cranfield University).

Tabela 2. BEZWZGLĘDNE BŁĘDY PROGNOZ DLA BADANYCH DGP (dok.)

DGP	Długość szeregu	Naiwna1	Naiwna2	Regresja liniowa	N-W	LJRL	NS	LA
DGP 14 BL	krótkie	0,9764	1,3270	0,9929	1,0068	1,0893	1,2810	2,0827
	średnie	0,9933	1,3512	0,9932	0,9969	1,0278	0,9479	0,9189
	długie	0,9910	1,4054	0,9916	0,9989	0,9970	1,0284	1,0051
DGP 15 EXPAR	krótkie	0,8516	1,3691	0,8284	0,8236	0,8489	0,9184	1,2809
	średnie	0,8477	1,3190	0,8123	0,8184	0,8261	1,1054	0,8221
	długie	0,8358	1,3686	0,7968	0,8014	0,8065	0,9571	1,9485
DGP 16 SETAR	krótkie	0,9089	1,2386	0,9196	0,8667	0,8800	1,0642	2,9509
	średnie	0,8887	1,2195	0,8920	0,8234	0,8307	0,8460	0,9042
	długie	0,8704	1,2434	0,8705	0,7983	0,8017	0,8900	1,4156
DGP 17 ARCH	krótkie	1,0289	1,3712	1,0466	1,0571	1,1825	1,2596	2,5127
	średnie	1,0102	1,3605	1,0144	1,0270	1,0724	1,1731	1,0333
	długie	0,9922	1,3736	0,9906	0,9997	1,1114	1,0650	1,0843
DGP 18 GARCH	krótkie	0,3412	0,4720	0,3455	0,3476	0,3680	0,3808	0,9093
	średnie	0,3389	0,4631	0,3399	0,3458	0,3488	0,3956	0,3414
	długie	0,3483	0,4897	0,3487	0,3552	0,3610	0,4428	0,4211
DGP 19 SV	krótkie	2,0250	2,8896	2,0661	2,0780	2,3114	2,1974	6,0470
	średnie	2,3361	3,2802	2,3437	2,3626	2,3786	3,1478	2,5761
	długie	2,2225	3,1276	2,2277	2,2420	2,2566	2,4853	2,3225
DGP 20 GARCH-M	krótkie	0,1302	0,1564	0,1261	0,1236	0,1277	0,1637	0,1362
	średnie	0,1302	0,1531	0,1262	0,1231	0,1241	0,1205	0,1647
	długie	0,1320	0,1576	0,1248	0,1217	0,1244	0,1302	0,4135

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku procesów chaotycznych (DGP 1 i DGP 4) najlepsze rezultaty otrzymano za pomocą metod LA oraz NS, przy czym metoda LA doprowadziła do prognoz parę rzędów dokładniejszych niż NS. Z kolei metoda NS dała dużo dokładniejsze prognozy niż metody jądrowe, spośród których lepsza okazała się LJRL. Model regresji liniowej okazał się słabym narzędziem prognozowania szeregów chaotycznych zarówno w przypadku systemów bez szumu, jak i z szumem. Dodanie do procesu generującego szumu (DGP 2, DGP 3, DGP 5, DGP 6) znacząco pogorszyło efektywność metody LA oraz NS. Zarówno w przypadku odwzorowania logistycznego, jak i systemu Henona, metoda LA stała się gorsza od naiwnej już w przypadku szumu na poziomie $0,5\sigma_Y$. Z kolei metoda NS dała dokładne prognozy jedynie dla systemu Henona ze słabszym szumem (DGP 5), ale zawiodła dla systemu z szumem silniejszym (DGP 6). Dodanie szumu do szeregów chaotycznych w relatywnie dużo mniejszym stopniu pogorszyło dokładność estymatorów jądrowych. W efekcie, za wyjątkiem szeregów średnich i długich dla procesu DGP 5, metody te okazały się najskuteczniejszymi narzędziami prognozowania chaosu z szumem, przy czym w sytuacji słabszego szumu LJRL miała przewagę nad estymatorem N-W, natomiast dla silnego szumu można zaobserwować sytuację odwrotną.

Zgodnie z oczekiwaniami najlepszym narzędziem prognozowania procesów liniowych (tj. DGP 7 i DGP 8) okazał się model regresji liniowej, choć tylko nieznacznie przewyższył on metodę naiwną². Wszystkie pozostałe metody dały prognozy mniej dokładne niż metoda naiwna. Dla procesu AR estymator N-W doprowadził do lepszych prognoz niż LJRL, natomiast dla ARMA dokładniejsza okazała się metoda LJRL. Najgorsze prognozy otrzymano przy zastosowaniu metod NS i LA.

Spośród pozostałych procesów z nieliniowością w średniej w pierwszej kolejności zbadano szczególne procesy klasy NARMA: NAR i NMA (DGP 9-DGP 13). Zastosowane narzędzia zawiodły w przypadku procesu DGP 11, dla którego jedynie model liniowy dał prognozy nieco dokładniejsze niż metoda naiwna¹. Dla pozostałych procesów można uznać, że najskuteczniejszymi narzędziami prognozowania okazały się metody jądrowe, przy czym estymator N-W zwykle prowadził do prognoz nieco dokładniejszych niż LJRL. Ponadto przeprowadzone badanie wykazało, że model liniowy jest mało skutecznym narzędziem prognozowania tego typu procesów. Jego wyższość nad metodą naiwną zaobserwowano jedynie w przypadku procesów DGP 13 i – w niewielkim stopniu – DGP 11. Relatywnie słabo wypadły również metody NS i LA, choć w przypadku tej drugiej można zauważyć, że dawała ona bardzo skrajne rezultaty, będąc w niektórych sytuacjach metodą najlepszą, a w niektórych – najgorszą.

W przypadku pozostałych procesów z nieliniowością w średniej, tj. BL, EXPAR i SETAR zaobserwowano, że model liniowy oraz modele regresji jądrowej dały prognozy o zbliżonej dokładności, przy czym dla procesów BL i EXPAR model liniowy był nieco lepszy niż modele jądrowe, natomiast dla SETAR – nieco gorszy. Porównując obie metody jądrowe, ponownie można zauważyć niewielką wyższość estymatora N-W nad LJRL. Z otrzymanych rezultatów wynika również, że wszystkie zastosowane metody zawiodły w przypadku procesu BL. Jedynie dla szeregów średnich tego procesu znalazły się metody – LA i NS – lepsze niż metoda naiwna. Jednak dla pozostałych długości szeregów tego procesu oraz dla procesów EXPAR i SETAR metody LA i NS okazały się mało skutecznymi narzędziami prognozowania.

Analizując wyniki dla procesów z nieliniowością w wariancji (DGP 17-DGP 19), rzuca się w oczy niska efektywność zastosowanych narzędzi w porównaniu z metodą naiwną¹. Rezultat ten należy uznać za spodziewany, gdyż zastosowane metody zostały skonstruowane do prognozowania warunkowej wartości oczekiwanej. Dodatkowo, zwraca jednak uwagę wyższość modelu liniowego nad metodami jądrowymi, spośród których estymator N-W okazał się lepszy niż LJRL (co szczególnie wyraźne jest przypadku procesów ARCH i SV). Z kolei metody jądrowe okazały się mieć przewagę nad metodami NS i LA.

Inne rezultaty otrzymano dla procesu hybrydowego GARCH-M. Pojawienie się w procesie generującym nieliniowości w średniej spowodowało, że zastoso-

wane modele regresji okazały się lepsze niż metoda naiwna. Metody jądrowe doprowadziły do prognoz nieznacznie lepszych niż model liniowy, przy czym estymator N-W okazał się lepszy niż LJRL. Metoda LA ponownie zawiodła, natomiast NS dał zróżnicowane efekty, prowadząc dla szeregów o średniej długości do prognoz najlepszych, a dla szeregów długich – do prognoz gorszych niż metoda naiwna.

4. PODSUMOWANIE WYNIKÓW BADAŃ

Z przeprowadzonych symulacji Monte Carlo wynika, że w przypadku większości procesów generujących dokładność prognoz zastosowanych modeli regresji (tj. modelu liniowego, estymatora Nadarai-Watsona oraz Lokalnej Jądrowej Regresji Liniowej) rośnie wraz ze zwiększaniem się długości szeregów czasowych. Wyjątkiem są nieliczne sytuacje, gdy metody te w ogóle zawodzą, dając prognozy mniej dokładne niż metoda naiwna. W efekcie ranking zastosowanych modeli regresji jest podobny dla wszystkich rozważonych długości szeregów czasowych. Porównując obie metody jądrowe, można zauważyć, że LJRL jest bardziej wrażliwa na liczbę obserwacji, co powoduje, że w niektórych przypadkach jej przewaga np. nad modelem liniowym jest zauważalna dopiero dla szeregów średnich i długich.

Dla metody Najbliższych Sąsiadów, a zwłaszcza Lokalnej Aproksymacji Liniowej, nie da się sformułować prostej zależności między długością szeregu czasowego a dokładnością prognoz. Jedynie w przypadku procesów deterministycznych (tj. DGP 1 i DGP 4) dokładność prognoz rosła wraz ze wzrostem liczby obserwacji. W przypadku pozostałych procesów zależność ta często nie miała miejsca, co najprawdopodobniej jest konsekwencją wrażliwości obu metod na wartości parametrów (por. Orzeszko, 2004b).

Z otrzymanych rezultatów wynika, że nie ma jednej metody, która miałaby przewagę nad pozostałymi bez względu na proces generujący. Można jednak stwierdzić, że najgorszą z nich okazała się metoda naiwna², która jedynie w przypadku procesu DGP 8 doprowadziła do prognoz o relatywnie dużej dokładności. Dla procesów chaotycznych (bez szumu) najlepsze rezultaty otrzymano przy zastosowaniu metod LA oraz NS. W przypadku chaosu z szumem i większości innych stochastycznych procesów z nieliniowością w średniej najskuteczniejszymi narzędziami prognozowania okazały się metody jądrowe, z których estymator Nadarai-Watsona miał zwykle przewagę nad Lokalną Jądrową Regresją Liniową. Zgodnie z oczekiwaniami, w przypadku procesów liniowych model regresji liniowej wykazał swoją wyższość nad pozostałymi metodami. Przeprowadzone badanie potwierdziło również, że zastosowane metody nie są dobrym narzędziem prognozowania procesów z nieliniowością w wariancji.

LITERATURA

- Bowman A. W., Azzalini A., (1997), *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-Plus Illustrations*, Clarendon Press, Oxford.
- Brock W. A., Dechert W. D., Scheinkman J. A., LeBaron B., (1996), A Test for Independence Based on the Correlation Dimension, *Econometric Reviews*, 15 (3), 197–235.
- Bruzda J., (2007), *Procesy nieliniowe i zależności długookresowe w ekonomii. Analiza kointegracji nieliniowej*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
- Diks C., Panchenko V., (2007), Nonparametric Tests for Serial Independence Based on Quadratic Forms, *Statistica Sinica*, 17, 81–98.
- Fan J., Gijbels I., (1992), Variable Bandwidth and Local Linear Regression Smoothers, *Annals of Statistics*, 20 (4), 2008–2036.
- Fan J., Yao Q., (2005), *Nonlinear Time Series. Nonparametric and Parametric Methods*, Springer, New York.
- Finkenstädt B., Kuhbier P., (1995), Forecasting Nonlinear Economic Time Series: A Simple Test to Accompany the Nearest Neighbor Approach, *Empirical Economics*, 20, 243–263.
- Gajek L., Kaluszka M., (1996), *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Granger C. W. J., Lin J-L., (1994), Using the Mutual Information Coefficient to Identify Lags in Nonlinear Models, *Journal of Time Series Analysis*, 15, 371–384.
- Granger C. W. J., Maasoumi E., Racine J., (2004), A Dependence Metric for Possibly Nonlinear Processes, *Journal of Time Series Analysis*, 25 (5), 649–669.
- Granger C. W. J., Teräsvirta T., (1992), Experiments in Modeling Nonlinear Relationships Between Time Series, w: Castagli M., Eubank S., (red.), *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Redwood City, Addison-Wesley, 189–197.
- Granger C. W. J., Teräsvirta T., (1993), *Modelling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press.
- Härdle W., Lütkepohl H., Chen R., (1997), A Review of Nonparametric Time Series Analysis, *International Statistical Review*, 65 (1), 49–72.
- Hong Y., White H., (2005), Asymptotic Distribution Theory for an Entropy-Based Measure of Serial Dependence, *Econometrica*, 73, 837–901.
- Hyndman R. J., Bashtannyk D. M., Grunwald G. K., (1996), Estimating and Visualizing Conditional Densities, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5, 315–336.
- Jerzman B., Kicinski W., (2009), Kernel Estimation of Probability Density Function: Properties and Parameters Optimization, *Metrology and Measurement Systems*, 16 (1), 85–105.
- Kosiorowski D., (2015), Two Procedures for Robust Monitoring of Probability Distributions of Economic Data Streams, *Operations Research and Decisions*, 55–79.
- Kulczycki P., (2005), *Estymatory jądrowe w analizie systemowej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- LeBaron B., (1994), Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 348 (1686), 397–404.
- Markellos R. N., (2002), Nonlinear Dynamics in Economics and Finance, *Working paper*, Athens University of Economics and Business.
- Morley J., (2009), Macroeconomics, Nonlinear Time Series in, w: Meyers R. A., (red.), *Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer Verlag, New York, 5325–5348.
- Nadaraya E. A., (1964), On Estimating Regression, *Theory of Probability and its Applications*, 9 (1), 141–142.

- Orzeszko W., (2004a), Krótkoterminowe prognozowanie chaotycznych szeregów czasowych, *Przeгляд Statystyczny*, 51 (3), 115–127.
- Orzeszko W., (2004b), How the Prediction Accuracy of Chaotic Time Series Depends on Methods of Determining the Parameters of Delay Vectors, *Dynamic Econometric Models*, 6, 231–239.
- Orzeszko W., (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, FPIAKE, PTE, Warszawa.
- Orzeszko W., (2016), *Nieparametryczna identyfikacja nieliniowości w finansowych i ekonomicznych szeregach czasowych*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- Orzeszko W., (2017), Nonparametric Testing for Serial Independence Using the NRL Statistic, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 46 (7), 5151–5165.
- Osińska M., Górka J., (2006), Identification of Non-linearity in Economic Time Series, *Dynamic Econometric Models*, 7, 83-92.
- Pagan A., Ullah A., (1999), *Nonparametric Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Racine J. S., (2008), Nonparametric Econometrics: a Primer, *Foundations and Trends in Econometrics*, 3 (1), 1–88.
- Ramsey J. B., (1996), If Nonlinear Models Cannot Forecast, What Use are They?, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 1 (2), 65–86.
- Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J., (1993), A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets, *Physica D*, 65, 117–134.
- Śliwicki D., (2016), *Estymacja jądrowa w analizie ekonometrycznej*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- Stelmach J., (2014), O interpretacji nieparametrycznych modeli regresyjnych, w: Barczak A. S., Miśkiewicz-Nawrocka M., (red.), *Studia Ekonomiczne*, 203, 154–162, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach.
- Stinchcombe M. B., Drukker D. M., (2013), Regression Efficacy and the Curse of Dimensionality, w: Chen X., Swanson N., (red.), *Recent Advances and Future Directions in Causality, Prediction, and Specification Analysis*, 527-549, Springer, New York.
- Stone C. J., (1977), Consistent Nonparametric Regression, *Annals of Statistics*, 5, 595–620.
- Stone C. J., (1982), Optimal Global Rates of Convergence for Nonparametric Regression, *Annals of Statistics*, 10, 1040–1053.
- Takens F., (1981), Detecting Strange Attractors in Turbulence, w: Rand D., Young L., (red.), *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag, 366–381.
- Wand M. P., Jones M. C., (1995), *Kernel Smoothing*, Chapman & Hall, London.
- Watson G. S., (1964), Smooth Regression Analysis, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics (Series A)*, 26 (4), 359–372.

WYBRANE ASPEKTY NIEPARAMETRYCZNEGO PROGNOZOWANIA NIELINIOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Streszczenie

Regresja nieparametryczna stanowi obiecujące, lecz jednocześnie wciąż niedoceniane podejście do modelowania finansowych i ekonomicznych szeregów czasowych. Polega ona na konstrukcji modeli nieparametrycznych, w których zależność pomiędzy zmiennymi nie jest wyrażona w postaci funkcji o określonej postaci analitycznej lub parametry charakteryzujące tę zależność

należą do przestrzeni nieskończenie wymiarowej. W przeciwieństwie do modeli parametrycznych, modele nieparametryczne nie są ograniczone do określonej z góry postaci, lecz pozwalają „mówić danym samym za siebie”. Z tego względu wydają się interesującym narzędziem prognozowania zwłaszcza w przypadku nieliniowych szeregów czasowych.

W zakresie nieparametrycznych metod regresji na szczególną uwagę zasługują estymatory, które w swojej konstrukcji wykorzystują funkcje jądrowe. Spośród nich najczęściej stosowanym jest estymator Nadarai-Watsona, choć obecnie znane są pewne rozwinięcia tego podejścia. Jednym z nich jest Lokalna Jądrowa Regresja Liniowa, będąca połączeniem estymacji jądrowej i lokalnej aproksymacji liniowej. W pracy przeprowadzono symulacje Monte Carlo, mające na celu ocenę przydatności metod regresji jądrowej do prognozowania nieliniowych szeregów czasowych i porównanie ich z innymi metodami prognozowania.

Słowa kluczowe: regresja nieparametryczna, nieparametryczne prognozowanie, metody jądrowe, nieliniowe szeregi czasowe, analiza Monte Carlo

SEVERAL ASPECTS OF NONPARAMETRIC PREDICTION OF NONLINEAR TIME SERIES

Abstract

Nonparametric regression is an alternative to the parametric approach, which consists of applying parametric models, i.e. models of the certain functional form with a fixed number of parameters. As opposed to the parametric approach, nonparametric models have a general form, which can be approximated increasingly precisely when the sample size grows. Hereby they do not impose such restricted assumptions about the form of the modelling dependencies and in consequence, they are more flexible and let the data speak for themselves. That is why they are a promising tool for forecasting, especially in case of nonlinear time series.

One of the most popular nonparametric regression method is the Nadaraya-Watson kernel smoothing. Nowadays, there are a number of variations of this method, like the local-linear kernel estimator, which combines the local linear approximation and the kernel estimator. In the paper a Monte Carlo study is conducted in order to assess the usefulness of the kernel smoothers to nonlinear time series forecasting and to compare them with the other techniques of forecasting.

Keywords: nonparametric regression, nonparametric forecasting, kernel smoothers, nonlinear time series, Monte Carlo study

Dariusz KACPRZAK¹

Rozmyta metoda *SAW* z wagami uzyskanymi za pomocą rozmytej entropii²

1. WSTĘP

Człowiek w życiu codziennym bezustannie spotyka się z sytuacjami, w których musi dokonywać wyborów (pojmować decyzje), a rosnąca złożoność otaczającego nas świata sprawia, że zadania te stają się coraz trudniejsze. Przyczyniło się to do rozwoju tzw. dyskretnych metod wielokryterialnych wspomaganie decyzji (ang. *Multiple Criteria Decision Making – MCDM*). Dysponują one gotowymi algorytmami postępowania w celu dokonania wyboru wariantu końcowego w świetle przyjętych kryteriów. W metodach tych zbiór danych wejściowych stanowią:

- zbiór wariantów decyzyjnych, z których chcemy wybrać wariant końcowy,
- zbiór kryteriów, względem których oceniane są rozważane warianty decyzyjne,
- wektor wag określający istotność (ważność) poszczególnych kryteriów,
- macierz decyzyjna złożona z ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kryteriów.

Metody wielokryterialne wspomaganie decyzji na podstawie powyższych informacji tworzą ranking rozważanych wariantów decyzyjnych w świetle przyjętych kryteriów, poprzez liniowe uporządkowanie od wariantu końcowego (najwyższa pozycja w rankingu) do najłagodszego (najniższa pozycja rankingu).

W klasycznych wersjach metod wielokryterialnych wagi kryteriów oraz elementy macierzy decyzyjnej są wyrażane za pomocą liczb rzeczywistych. Jednak złożoność dokonywanych wyborów, a z drugiej strony ich masowość (duża ilość decyzji, wybory mogą następować jeden po drugim) powoduje, że szczegółowa analiza i precyzyjna ocena sytuacji decyzyjnej może okazać się bardzo trudna. Oznacza to konieczność dokonywania wyborów w sytuacji niepełnej informacji lub też niepodjęcia decyzji wcale. Dodatkowo decydenci (eksperti) dokonują oceny zgodne z ich poziomem wiedzy, doświadczeniem i często są one uzależnione od dostępnych informacji o rozważanym problemie decyzyjnym, a ich

¹ Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Katedra Matematyki, ul. Wiejska 45A, 15–351 Białystok, Polska, e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl.

² Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

oceny mają często charakter lingwistyczny. Sprawia to, że w metodach wielokryterialnych powszechnie zaczęto stosować liczby rozmyte. Pozwalają one na matematyczne prezentowanie i przetwarzanie informacji nieprecyzyjnej czy niepełnej oraz wyrażonej za pomocą zmiennych lingwistycznych. Otrzymane w ten sposób metody nazywamy rozmytymi metodami wielokryterialnymi wspomaganiami decyzji (ang. *Fuzzy Multiple Criteria Decision Making – FMCDM*).

Jedną z najprostszych i powszechnie stosowanych metod wielokryterialnych jest metoda *SAW* (ang. *Simple Additive Weighting*). Idea tej metody sprowadza się do wyznaczenia dla każdego wariantu decyzyjnego kombinacji liniowej elementów znormalizowanej macierzy decyzyjnej oraz odpowiednich elementów wektora wag. Pozwala to na liniowe uporządkowanie rozważanych wariantów decyzyjnych i wybranie wariantu końcowego w świetle przyjętych kryteriów. Rozmyta wersja metody *SAW*, w której oceny wariantów decyzyjnych i/lub wagi kryteriów są wyrażone za pomocą liczb rozmytych, metoda *FSAW* (ang. *Fuzzy Simple Additive Weighting*), mimo prostoty znajduje zastosowanie w rozwiązaniu wielu problemów życia codziennego. Wykorzystano ją m.in. do oceny poziomu osiągnięć studentów (Deni i inni, 2013), do wyboru dostawcy w łańcuchu dostaw (Gupta, Gupta, 2012), do wyboru strategii konserwacji urządzeń magazynowych (Sagar i inni, 2013), do wyboru lokalizacji jednostki medycznej (Lin i inni, 2010), do rankingu wskaźników zdrowotnych określających jakość życia (Abdullah, Jamal, 2010). Pokazuje to, że zastosowania metody *FSAW* są różnorodne. Opierając się na pracach opublikowanych w latach 2003–2013 wykorzystujących metodę *FSAW* (lub *SAW*) Abdullah, Adawiyah (2014) dokonali podziału obszarów jej zastosowania na: zarządzanie (52,63%), technologie informacyjne (10,53%), zdrowie (10,53%), edukacja (5,26%) i inżynieria (5,26%).

W metodach wielokryterialnych różnorodność kryteriów powoduje, że mają one różne znaczenie i wpływ na wybór wariantu końcowego. Sprawia to, że wyznaczenie odpowiednich wag, które określają istotność poszczególnych kryteriów, staje się jednym z kluczowych elementów tych metod. Istnieje wiele sposobów wyznaczania wag kryteriów, które zazwyczaj podzielone są na dwie grupy: wagi subiektywne i wagi obiektywne. Wagi subiektywne są uzyskiwane m.in. przez określenie preferencji decydenta, oceny eksperckie, badania ankietowe, konsultacje społeczne czy zastosowanie metody *AHP*. Z kolei wagi obiektywne są uzyskiwane za pomocą metod matematycznych bez odwoływania się do wiedzy, doświadczenia czy preferencji decydentów oraz ekspertów. Jedną z metod wyznaczania wag obiektywnych jest metoda entropii. Entropia określa stopień nie uporządkowania zbioru, inaczej stopień jego wyjątkowości. Pozwala ona na określenie istotności poszczególnych kryteriów na podstawie rozbieżności wartości każdego z nich.

Celem pracy jest przedstawienie rozmytej metody *SAW* z nieznanymi wagami kryteriów. Wydaje się zasadne i logiczne, że jeżeli oceny wariantów decyzyjnych

względem kryteriów są opisane liczbami rozmytymi, to również wagi kryteriów powinny być reprezentowane przez liczby rozmyte. W tej sytuacji rozmyte wagi zostaną wyznaczone z wykorzystaniem rozmytej entropii. Praca składa się z siedmiu części. W drugiej przedstawiono podstawowe informacje o liczbach rozmytych. Kolejna jest poświęcona na omówienie klasycznej metody *SAW* i metody wyznaczania wag kryteriów z użyciem entropii. Część czwarta prezentuje proponowaną rozmytą metodę *SAW* z rozmytymi wagami, a piąta przykład liczbowy. Praca kończy się porównaniem proponowanej metody z innymi metodami wykorzystującymi entropię do określenia wag kryteriów oraz podsumowaniem.

2. LICZBY ROZMYTE

Teorię zbiorów rozmytych, jako rozszerzenie klasycznej teorii zbiorów, zapoczątkował Lotfi Asker Zadeh. W pracy pod tytułem *Fuzzy Sets* (Zadeh, 1965) wprowadził on pojęcie zbioru rozmytego, który pozwala na opisywanie i matematyczne modelowanie wielkości nieprecyzyjnych czy też wyrażonych za pomocą języka mówionego. Znalazło to szerokie zastosowanie praktyczne, szczególnie w zagadnieniach związanych ze sterowaniem i wspomaganie podejmowania decyzji.

Definicja 1 (Zadeh, 1965). Niech X będzie przestrzenią obiektów. Zbiorem rozmytym A w przestrzeni X nazywa się zbiór par

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}, \quad (1)$$

gdzie $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ jest funkcją przynależności, która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A .

Definicja 2 (Czogala, Pedrycz, 1985). Liczba rozmyta A to zbiór rozmyty osi rzeczywistej \mathbb{R} ($X = \mathbb{R}$), którego funkcja przynależności

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] \quad (2)$$

spełnia następujące warunki

- normalność, tzn.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_A(x) = 1, \quad (3)$$

- wypukłość, tzn.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, y \in [x, z] : \mu_A(y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(z)\}. \quad (4)$$

W praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, np. w metodzie *FSAW*, często wykorzystuje się trójkątne dodatnie liczby rozmyte, które zapisujemy w formie

$$A = T(a_A; b_A; c_A), \text{ gdzie } 0 \leq a_A \leq b_A \leq c_A, \quad (5)$$

a ich funkcja przynależności ma postać

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_A}{b_A - a_A} & \text{gdym } a_A \leq x \leq b_A, \\ \frac{c_A - x}{c_A - b_A} & \text{gdym } b_A \leq x \leq c_A, \\ 0 & \text{gdym } x \leq a_A \vee x \geq c_A. \end{cases} \quad (6)$$

Podstawowe działania arytmetyczne na trójkątnych dodatnich liczbach rozmytych $A = T(a_A; b_A; c_A)$, gdzie $0 \leq a_A \leq b_A \leq c_A$, i $B = T(a_B; b_B; c_B)$, gdzie $0 \leq a_B \leq b_B \leq c_B$, określamy następująco:

– dodawanie

$$A + B = T(a_A; b_A; c_A) + T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A + a_B; b_A + b_B; c_A + c_B), \quad (7)$$

– odejmowanie

$$A - B = T(a_A; b_A; c_A) - T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A - c_B; b_A - b_B; c_A - a_B), \quad (8)$$

– mnożenie

$$A * B = T(a_A; b_A; c_A) * T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A * a_B; b_A * b_B; c_A * c_B), \quad (9)$$

– mnożenie przez dodatnią liczbę rzeczywistą $r \in \mathbb{R}_+$

$$r * A = r * T(a_A; b_A; c_A) = T(r * a_A; r * b_A; r * c_A), \quad (10)$$

– dzielenie

$$A : B = T(a_A; b_A; c_A) : T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A : c_B; b_A : b_B; c_A : a_B), \text{ jeżeli } a_B > 0. \quad (11)$$

Wynikiem działań mnożenia (9) i dzielenia (11) trójkątnych liczb rozmytych nie muszą być trójkątne liczby rozmyte, jednak możemy je przybliżać trójkątnymi liczbami rozmytymi co jest wystarczające w wielu praktycznych zastosowaniach (Kaufmann, Gupta, 1988).

Do porównywania trójkątnych liczb rozmytych, będących wynikiem działania metody *FSAW* opartej na trójkątnych liczbach rozmytych, wykorzystamy popularną metodę defuzyfikacji tzw. metodę środka ciężkości (*Center of Gravity – CoG*). Jeżeli A jest liczbą rozmytą o funkcji przynależności $\mu_A(x)$, metoda środka ciężkości opisana jest formułą

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \mu_A(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu_A(x) dx}. \quad (12)$$

W przypadku trójkątnej dodatniej liczby rozmytej (5) o funkcji przynależności (6) formuła (12) przyjmuje postać

$$\phi_{CoG}(T(a_A; b_A; c_A)) = \frac{a_A + b_A + c_A}{3}. \quad (13)$$

3. KLASYCZNA METODA SAW ORAZ WYZNACZANIE WAG ZA POMOCĄ ENTROPII

Jak już wspomniano we wstępie, klasyczna metoda *SAW* (Churchman, Ackoff, 1954) jest jedną z najprostszych i najpopularniejszych metod wspomagających rozwiązywanie dyskretnych problemów wielokryterialnych. Załóżmy, że mamy zbiór m wariantów decyzyjnych $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, z których decydent chce wybrać wariant końcowy oraz zbiór n kryteriów $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$, względem których oceniane są rozważane warianty decyzyjne. Dowolny dyskretny wielokryterialny problem decyzyjny można przestawić w postaci tzw. macierzy decyzyjnej (14)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

gdzie x_{ij} jest oceną i -tego wariantu decyzyjnego A_i ($i = 1, \dots, m$) ze względu na j -te kryterium K_j ($j = 1, \dots, n$) oraz wektora wag (15)

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n), \quad (15)$$

gdzie w_j jest wagą j -tego kryterium K_j ($j = 1, \dots, n$), spełniającą zależność

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1. \quad (16)$$

Klasyczna wersja metody *SAW* zakłada, że oceny x_{ij} oraz wagi w_j są określone precyzyjnie za pomocą liczb rzeczywistych i przebiega w następujących etapach.

ETAP 1: Budowa macierzy decyzyjnej $X = (x_{ij})$ ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów postaci (14).

ETAP 2: Normalizacja ocen wariantów decyzyjnych w ramach danego kryterium, aby uzyskać jednolity charakter poszczególnych kryteriów, np. według formuły

$$z_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}} & \text{gdy } K_j - \text{stymulana,} \\ \frac{\min_i x_{ij}}{x_{ij}} & \text{gdy } K_j - \text{destymulanta.} \end{cases} \quad (17)$$

ETAP 3: Wyznaczenie dla każdego wariantu decyzyjnego kombinacji liniowej jego znormalizowanych ocen względem kryteriów (17) oraz wektora wagowego (15) według wzoru

$$SAW(A_i) = \sum_{j=1}^n z_{ij} w_j. \quad (18)$$

ETAP 4: Uporządkowanie liniowe wyników $SAW(A_i)$ i wybór wariantu końcowego w świetle przyjętych kryteriów, czyli tego dla którego zagregowana ocena (18) jest najwyższa.

Jedną z metod wyznaczania wektora wag (15), która zaliczana jest do tzw. metod obiektywnych, jest metoda oparta na entropii. Wykorzystuje ona informacje pochodzące z ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów, czyli z macierzy decyzyjnej (14) i przebiega w kilku etapach (Hwang, Yoon, 1981; Kobryń, 2014).

ETAP 1: Przekształcenie macierzy decyzyjnej (14) w macierz $Y = (y_{ij})$, w której wszystkie kryteria będą miały charakter stymulant, tzn.

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{gdy } K_j - \text{stymulana,} \\ 1/x_{ij} & \text{gdy } K_j - \text{destymulana.} \end{cases} \quad (19)$$

ETAP 2: Normalizacja macierzy $Y = (y_{ij})$ i otrzymanie macierzy $Z = (z_{ij})$ o elementach

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sum_{i=1}^m y_{ij}}. \quad (20)$$

ETAP 3: Wyznaczenie entropii za pomocą formuły

$$e_j = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m z_{ij} \ln z_{ij}. \quad (21)$$

ETAP 4: Wyznaczenie poziomu zmienności entropii dla każdego kryterium (stopnia wewnętrznej rozbieżności ocen względem kolejnych kryteriów)

$$d_j = 1 - e_j. \quad (22)$$

ETAP 5: Wyznaczenie wag (stopnia ważności) kryteriów zgodnie ze wzorem

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}. \quad (23)$$

Metodę entropii można również wykorzystać do korekty wag \hat{w}_j określonych subiektywnie, np. przez decydenta czy eksperta, stosując następującą formułę

$$\bar{w}_j = \frac{w_j \hat{w}_j}{\sum_{j=1}^n w_j \hat{w}_j}. \quad (24)$$

4. PROPONOWANA METODA

Założmy, że decydent chce dokonać wyboru jednego z m wariantów decyzyjnych $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, które są oceniane względem n kryteriów $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Proponowana rozmyta metoda *SAW* o wagach uzyskanych za pomocą rozmytej entropii przebiega w następujących etapach.

ETAP 1: Utworzenie macierzy decyzyjnej

$$X = (x_{ij}), \quad (25)$$

gdzie $x_{ij} = T(a_{x_{ij}}; b_{x_{ij}}; c_{x_{ij}})$ jest dodatnią trójkątną liczbą rozmytą będącą oceną wariantu decyzyjnego A_i względem kryterium K_j . Poszczególne elementy liczby x_{ij} możemy interpretować następująco: w przypadku stymulanty $a_{x_{ij}}$ oznacza ocenę pesymistyczną wariantu decyzyjnego A_i względem kryterium K_j , $b_{x_{ij}}$ ocenę najbardziej prawdopodobną, $c_{x_{ij}}$ ocenę optymistyczną, a w przypadku destymulanty interpretacje ocen $a_{x_{ij}}$ i $c_{x_{ij}}$ są zamienione.

ETAP 2: Normalizacja macierzy $X = (x_{ij})$ ocen wariantów decyzyjnych w ramach danego kryterium i budowa macierzy $Z = (z_{ij})$ zgodnie z formułą

$$z_{ij} = \begin{cases} T\left(\frac{a_{x_{ij}}}{\sum_i c_{x_{ij}}}; \frac{b_{x_{ij}}}{\sum_i c_{x_{ij}}}; \frac{c_{x_{ij}}}{\sum_i c_{x_{ij}}}\right) & \text{gdy } K_j - \text{stymulana,} \\ T\left(\frac{1/c_{x_{ij}}}{\sum_i 1/a_{x_{ij}}}; \frac{1/b_{x_{ij}}}{\sum_i 1/a_{x_{ij}}}; \frac{1/a_{x_{ij}}}{\sum_i 1/a_{x_{ij}}}\right) & \text{gdy } K_j - \text{destymulanta.} \end{cases} \quad (26)$$

ETAP 3: Wyznaczenie wag kryteriów.

ETAP 3.1: Wyznaczenie, dla każdego kryterium, entropii

$$e_j = T(a_{e_j}; b_{e_j}; c_{e_j}), \quad (27)$$

gdzie $a_{e_j} = k \sum_{i=1}^m a_{z_{ij}} \ln(a_{z_{ij}})$, $b_{e_j} = k \sum_{i=1}^m b_{z_{ij}} \ln(b_{z_{ij}})$, $c_{e_j} = k \sum_{i=1}^m c_{z_{ij}} \ln(c_{z_{ij}})$ i $k = -\frac{1}{\ln m}$. W przypadku, gdy $a_{z_{ij}} = 0$ lub $b_{z_{ij}} = 0$ lub $c_{z_{ij}} = 0$ dla pewnego i , to wartość składnika, odpowiednio $a_{z_{ij}} \ln(a_{z_{ij}})$ lub $b_{z_{ij}} \ln(b_{z_{ij}})$ lub $c_{z_{ij}} \ln(c_{z_{ij}})$ jest przyjmowana jako 0, co jest zgodne z granicą $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

UWAGA 1.

Biorąc pod uwagę monotoniczność funkcji $f(x) = x \ln x$ zauważmy, że gdy $a_{z_{ij}} > e^{-1}$ lub $b_{z_{ij}} > e^{-1}$ lub $c_{z_{ij}} > e^{-1}$ (tzn. nośnik liczby rozmytej z_{ij} nie leży w przedziale $[0; e^{-1}]$), liczby $e_j = T(a_{e_j}, b_{e_j}, c_{e_j})$ mogą nie być trójkątnymi dodatnimi liczbami rozmytymi, tzn. mogą nie spełniać warunku $0 \leq a_{e_j} < b_{e_j} < c_{e_j}$. Aby uniknąć takiej sytuacji (lub wyeliminować gdyby wystąpiła), możemy zastosować inną metodą normalizacji, np. przeskalowania liniowego (Kobryń, 2014, s.45, formuły 2.14 i 2.15).

ETAP 3.2: Wyznaczenie dla każdego kryterium poziomu zmienności entropii

$$d_j = T(1 - c_{e_j}; 1 - b_{e_j}; 1 - a_{e_j}). \quad (28)$$

ETAP 3.3: Wyznaczenie wag kryteriów

$$w_j = T\left(\frac{a_{d_j}}{\sum_{j=1}^n c_{d_j}}; \frac{b_{d_j}}{\sum_{j=1}^n b_{d_j}}; \frac{c_{d_j}}{\sum_{j=1}^n a_{d_j}}\right). \quad (29)$$

UWAGA 2.

Wagi uzyskane w ETAPIE 3.3 nie muszą spełniać warunku, że ich nośniki są zawarte w przedziale $[0; 1]$, tzn. $0 \leq a_{w_j} \leq b_{w_j} \leq c_{w_j} \leq 1$. Aby zapewnić spełnienie tego warunku możemy je znormalizować zgodnie z formułą

$$w_{nj} = T\left(\frac{a_{w_j}}{\sum_j c_{w_j}}; \frac{b_{w_j}}{\sum_j c_{w_j}}; \frac{c_{w_j}}{\sum_j c_{w_j}}\right). \quad (30)$$

ETAP 4: Agregacja znormalizowanych ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów (26) oraz wag kryteriów (29) lub (30) dla każdego $i = 1 \dots m$ zgodnie formułą

$$FSAW(A_i) = T \left(\sum_{j=1}^n a_{z_{ij}} a_{w_j}; \sum_{j=1}^n b_{z_{ij}} b_{w_j}; \sum_{j=1}^n c_{z_{ij}} c_{w_j} \right). \quad (31)$$

ETAP 5: Uporządkowanie liniowe i utworzenie rankingu wariantów decyzyjnych za względu na wartość funkcji defuzyfikacji $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$ zgodnie z (13), wyników działania funkcji agregującej. Wariantem końcowym jest ten o najwyższej wartości $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$.

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Założmy, że po wstępnej selekcji, decydent chce wybrać jeden z czterech wariantów decyzyjnych A_1, A_2, A_3 i A_4 , które są oceniane względem pięciu kryteriów K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5 . Kryteria K_1, K_2 i K_3 są stymulantami, natomiast kryteria K_4 i K_5 są destymulantami. Ze względu na nieprecyzyjność informacji do oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów zastosowano dodatnie trójkątne liczby rozmyte, a rezultaty zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. ROZMYTA MACIERZ DECYZYJNA OCEN WARIANTÓW DECYZYJNYCH WZGLĘDEM KRYTERIÓW

Wyszczególnienie	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A_1	$T(53; 72; 91)$	$T(62; 69; 76)$	$T(50; 70; 90)$	$T(34; 54; 74)$	$T(41; 61; 81)$
A_2	$T(34; 54; 74)$	$T(56; 62; 68)$	$T(47; 67; 87)$	$T(36; 54; 72)$	$T(38; 58; 78)$
A_3	$T(30; 49; 68)$	$T(78; 88; 98)$	$T(42; 62; 82)$	$T(38; 56; 74)$	$T(43; 61; 79)$
A_4	$T(65; 81; 97)$	$T(37; 39; 41)$	$T(53; 72; 91)$	$T(31; 53; 75)$	$T(42; 62; 82)$

Źródło: opracowanie własne.

Rozmytą macierz decyzyjną (tabela 1) poddano normalizacji zgodnie z formułą (26), a następnie na jej bazie wyznaczono entropię (e) zgodnie z (27), poziom zmienności entropii (d) zgodnie z (28), wagi kryteriów (w) zgodnie z (29), znormalizowane wagi kryteriów (w_n) zgodnie z formułą (30) i zestawiono w tabeli 2. Ponadto, aby ustalić ranking kryteriów w tabeli 2 pokazano również wartości defuzyfikacji wag $\phi_{CoG}(w_i)$ zgodnie z (13) i wartości $\phi_{CoGn}(w_i)$ wag po znormalizowaniu oraz ranking kryteriów R , który ma postać:

$$K_2 < K_3 < K_1 < K_5 < K_4.$$

Zagregowane znormalizowane oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów (tabela 1) i znormalizowane wagi kryteriów (tabela 2) zgodnie z formułą (31) przedstawiono w tabeli 3 w kolumnie $FSAW(A_i)$. Uzyskane wyniki poddano defuzyfikacji metodą środka ciężkości $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$ zgodnie z (13) co pozwa-

la na określenie rankingów wariantów decyzyjnych i wskazanie wariantu końcowego. Z tabeli 3 wynika, że ranking wariantów decyzyjnych jest następujący

$$A_3 < A_2 < A_4 < A_1$$

co oznacza, że wariant A_1 jest wariantem końcowym. Zauważmy również, że wariant A_4 jest „nieznacznie” gorszy od wariantu A_1 .

Tabela 2. ENTROPIA, POZIOM ZMIENNOŚCI, WAGI I WAGI ZNORMALIZOWANE ORAZ RANKING WAG

Wyszczególnienie	K_1	K_2	K_3
e	$T(0,7689; 0,9063; 0,9925)$	$T(0,9193; 0,9472; 0,9686)$	$T(0,7847; 0,9163; 0,9994)$
d	$T(0,0075; 0,0937; 0,2311)$	$T(0,0314; 0,0528; 0,0807)$	$T(0,0006; 0,0837; 0,2153)$
w	$T(0,0072; 0,1807; 5,4591)$	$T(0,0301; 0,1018; 1,9062)$	$T(0,0006; 0,1613; 5,0844)$
w_n	$T(0,0003; 0,0073; 0,2215)$	$T(0,0012; 0,0041; 0,0773)$	$T(0,0000; 0,0065; 0,2063)$
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,0764	0,0276	0,0710
$\phi_{CoGn}(w_i)$	0,2198	0,0793	0,2042
R	3	5	4
	K_4	K_5	
e	$T(0,7248; 0,8442; 0,9979)$	$T(0,7589; 0,8671; 0,9992)$	
d	$T(0,0021; 0,1558; 0,2752)$	$T(0,0008; 0,1329; 0,2411)$	
w	$T(0,0020; 0,3002; 6,5000)$	$T(0,0008; 0,2560; 5,6956)$	
w_n	$T(0,0001; 0,0122; 0,2637)$	$T(0,0000; 0,0104; 0,2311)$	
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,0920	0,0805	
$\phi_{CoGn}(w_i)$	0,2648	0,2317	
R	1	2	

Źródło: opracowanie własne.

6. PORÓWNANIE PROPONOWANEJ METODY Z INNYMI METODAMI WYKORZYSTUJĄCYMI ENTROPIĘ

W literaturze możemy znaleźć szereg prac wykorzystujących entropię do wyznaczenia wag kryteriów w metodach *FMCDM*. Znaczną ich część można podzielić na dwie grupy. Pierwszą stanowią prace, m.in. Wang, Lee (2009), Shemshadi i inni (2011), Zoraghi i inni (2013), Shahmardan, Zadeh (2013), Zhang i inni (2014), Garg i inni (2015), w których rozmyta macierz decyzyjna jest przekształcana w macierz rzeczywistą. Następnie stosowana jest klasyczna metoda wyznaczania wag z wykorzystaniem entropii (Hwang, Yoon, 1981; Kobryń, 2014), dając wagi rzeczywiste. Drugą grupę prac stanowią prace, m.in. Lotfi, Fallahnejad (2010), Chaghooshi i inni (2012), Cavallaro i inni (2016), wykorzystujące entropię przedziałową zaproponowaną przez Lotfi, Fallahnejada. Warto w tym miejscu wspomnieć o nowym podejściu do wyznaczania wag kryteriów z wykorzystaniem entropii zaproponowanym przez Kacprzaka (2017). Opiera się ono na modelu skierowanych liczb rozmytych i daje wagi w postaci skierowanych liczb rozmytych.

Tabela 3. WYNIKI DZIAŁANIA METODY $FSAW$ I RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Wyszczególnienie	$FSAW(A_i)$	$\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$	R
A_1	$T(0,0003; 0,0076; 0,2596)$	0,0892	1
A_2	$T(0,0003; 0,0071; 0,2450)$	0,0842	3
A_3	$T(0,0004; 0,0072; 0,2357)$	0,0811	4
A_4	$T(0,0002; 0,0074; 0,2597)$	0,0891	2

Źródło: opracowanie własne.

Prezentowaną w części 4 metodę opierając się na przykładzie przedstawionym w części 5, porównamy z metodami wspomnianymi wyżej wykorzystującymi entropię do wyznaczania wag. Zaczniemy od porównania z metodami, które do wyznaczania wag przekształcają macierz decyzyjną, aby była zbudowana z liczb rzeczywistych. W tym celu rozmytą macierz decyzyjną (tabela 1) normalizujemy zgodnie z (26) i stosując metodę środka ciężkości (13) przekształcamy w macierz rzeczywistą. Wykorzystując klasyczną metodę entropii wyznaczamy wektor rzeczywistych wag kryteriów postaci

$$w = (0,2063; 0,1162; 0,1842; 0,2625; 0,2307).$$

Znormalizowaną rozmytą macierz decyzyjną mnożymy przez uzyskany wektor wag rzeczywistych otrzymując zagregowane wyniki $FSAW(A_i)$, które po defuzyfikacji określają ranking, co jest widoczne w tabeli 4. Uzyskany ranking wariantów decyzyjnych ma postać $A_3 < A_2 < A_4 < A_1$ i jest zgodny z uzyskanym w części 5 (tabela 3). W celu lepszego porównania wyników uzyskanych z wykorzystaniem defuzyfikacji, w tabeli 5 zestawiono znormalizowane zgodnie z (20) wyniki $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$ widoczne w tabeli 3 ($T3$) oraz w tabeli 4 ($T4$). Widać z niej, że rezultaty stosowania metody $FSAW$, w której wagi są liczbami rozmytymi lub liczbami rzeczywistymi uzyskanymi po defuzyfikacji macierzy decyzyjnej i użyciu metody entropii są zbliżone. Należy jednak zwrócić uwagę, że w trakcie defuzyfikacji liczb rozmytych tracimy wiele cennych informacji takich jak symetria, szerokość nośnika i jądra, położenie na osi OX , co jest dodatkowym atutem proponowanej w części 4 metody, która zachowuje te informacje.

Tabela 4. WYNIKI DZIAŁANIA METODY $FSAW$ Z RZECZYWISTYMI WAGAMI I RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Wyszczególnienie	$FSAW(A_i)$	$\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$	R
A_1	$T(0,1447; 0,1909; 0,2597)$	0,1984	1
A_2	$T(0,1307; 0,1772; 0,2451)$	0,1843	3
A_3	$T(0,1334; 0,1786; 0,2405)$	0,1842	4
A_4	$T(0,1427; 0,1854; 0,2547)$	0,1943	2

Źródło: opracowanie własne.

Aby porównać wynik prezentowanej metody z przedziałową entropią zaproponowaną przez Lotfi, Fallahnejada (2010), rozmytą macierz decyzyjną (tabela 1)

przekształcamy, aby wszystkie kryteria były stymulantami korzystając z formuł (19) i (11). Następnie wyznaczamy przedziałowe wagi kryteriów oraz ich środki. Środki wag przedziałowych znormalizowano zgodnie z (20), co pozwala na ich porównywanie dla różnych wartości α , i zobrazowano na rysunku 1. Widać na nim, że dla niskich wartości α najistotniejszym kryterium jest K_4 , a najmniej istotnym K_2 . Użytkany ranking kryteriów wygląda następująco $K_2 < K_3 < K_1 < K_5 < K_4$ i jest zgodny z uzyskanym w części 5 dla liczb rozmytych. W miarę wzrostu wartości α istotność kryteriów ulega zmianie i dla $\alpha = 1$ ich ranking ma postać $K_4 < K_5 < K_3 < K_1 < K_2$. Oznacza to, że wartość α ma wpływ na istotność kryteriów. W szczególności możemy zauważyć, że kryterium K_2 ze wzrostem α z najmniej istotnego staje się najbardziej istotne, a kryterium K_4 odwrotnie.

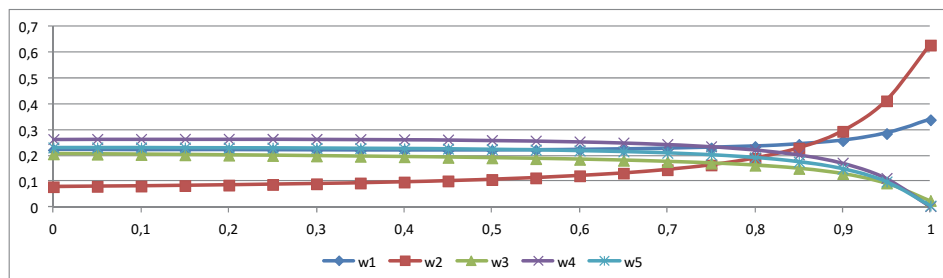
Na rysunku 2 pokazano jak wartość α wpływa na ranking wariantów decyzyjnych. Dla $\alpha < 0,682$ ranking ma postać $A_3 < A_2 < A_4 < A_1$ i jest zgodny z uzyskanym w części 5. Dla $\alpha \in (0,682; 0,683)$ warianty decyzyjne A_3 i A_2 zamieniają się miejscami. Zwiększając wartość α dochodzi do kolejnych zmian pozycji wariantów w rankingu: dla $\alpha \in (0,815; 0,816)$ między A_3 i A_4 , dla $\alpha \in (0,910; 0,911)$ A_2 i A_4 , a dla $\alpha \in (0,944; 0,945)$ wariantów A_1 i A_3 co daje ranking wariantów decyzyjnych postaci $A_4 < A_2 < A_1 < A_3$. Wynika z tego, że wariant A_3 o najniższej pozycji w ranking dla niskich wartości α zajmuje najwyższą pozycję przy wysokich wartościach α . Oznacza to, że wynik działania metody SAW na danych przedziałowych uzyskanych za pomocą α -przekrojów wejściowych liczb rozmytych jest zależny od wartości α .

Tabela 5. PORÓWNANIE WYNIKÓW DZIAŁANIA METODY FSAW Z WAGAMI RZECZYWISTYMI I ROZMYTYMI

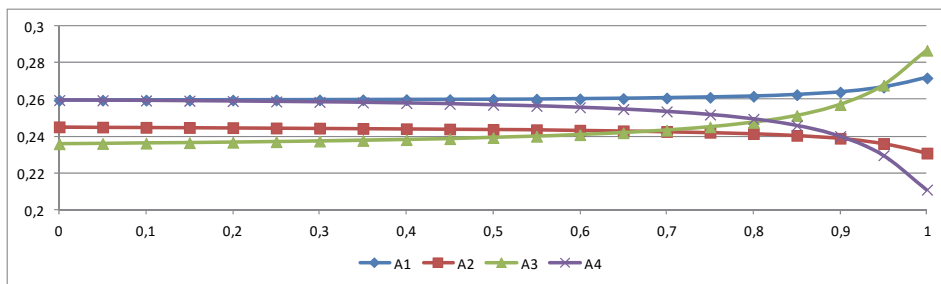
Wyszczególnienie	T_3	T_4
A_1	0,2596	0,2607
A_2	0,2450	0,2422
A_3	0,2360	0,2419
A_4	0,2594	0,2552

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1. Znormalizowane wagi kryteriów dla różnych poziomów α



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Wartości SAW wariantów decyzyjnych dla różnych poziomów α 

Źródło: opracowanie własne.

Porównamy jeszcze wyniki uzyskane proponowaną metodą z metodą *FSAW* opartą na skierowanych liczbach rozmytych (Roszkowska, Kacprzak, 2016) i wagach wyznaczonych za pomocą entropii rozmytej (Kacprzak, 2017). Na podstawie danych z przykładu z części 5, wyznaczone wagi są widoczne w tabeli 6. Po zastosowaniu defuzyfikacji metodą środka ciężkości otrzymano ranking kryteriów postaci

$$K_3 < K_5 < K_1 < K_4 < K_2$$

czyli „niemal odwrotny” niż w części 5. Następnie wyznaczone wagi wykorzystano w metodzie *FSAW* opartej na skierowanych liczbach rozmytych. Wyniki zestawione w tabeli 7 poddano defuzyfikacji metodą środka ciężkości i utworzono ranking wariantów decyzyjnych, który ma postać

$$A_4 < A_2 < A_1 < A_3$$

co oznacza, że wariant A_3 jest wariantem końcowym, podczas gdy był wariantem najsłabszym w przykładzie w części 5.

Tabela 6. WAGI ORAZ RANKING WAG UZYSKANE Z WYKORZYSTANIEM SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

Wyszczególnienie	K_1	K_2	K_3
w	$\vec{T}(0,2215; 0,1807; 0,1776)$	$\vec{T}(0,0773; 0,1018; 0,7408)$	$\vec{T}(0,2063; 0,1613; 0,0138)$
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,1932	0,3067	0,1271
R	3	1	5
	K_4	K_5	
w	$\vec{T}(0,2637; 0,3002; 0,0491)$	$\vec{T}(0,2311; 0,2560; 0,0188)$	
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,2043	0,1686	
R	2	4	

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. WYNIKI DZIAŁANIA METODY FSAW NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH I RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Wyszczególnienie	$FSAW(A_i)$	$\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$	R
A_1	$\vec{T}(0,1420; 0,1874; 0,2686)$	0,1993	2
A_2	$\vec{T}(0,1278; 0,1759; 0,2381)$	0,1806	3
A_3	$\vec{T}(0,1269; 0,1763; 0,3120)$	0,2051	1
A_4	$\vec{T}(0,1442; 0,1827; 0,1813)$	0,1694	4

Źródło: opracowanie własne.

7. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano rozmytą metodę SAW z nieznanymi wagami. Do ich wyznaczenia zastosowano metodę entropii, którą rozszerzono do entropii rozmytej. Pozwala ona na uzyskanie wag rozmytych i wykonanie rankingu wariantów decyzyjnych, w sytuacjach gdy decydenci czy eksperci wykorzystują liczby rozmyte lub zmienne lingwistyczne do oceny wariantów decyzyjnych wyglądem kryteriów. Ponadto wykorzystanie wag obiektywnych w prezentowanej metodzie pozwala zmniejszyć subiektywizm i nieprecyzyjność spowodowaną przez niepełną wiedzę, osądy, opinie i preferencje decydentów czy ekspertów.

LITERATURA

- Abdullah L., Adawiyah C. W. R., (2014), Simple Additive Weighting Methods of Multicriteria Decision Making and Applications: A Decade Review, *International Journal of Information Processing and Management*, 5/1, 39–49.
- Abdullah L., Jamal N. J., (2010), Determination of Weights for Health Related Quality of Life Indicators Among Kidney Patients: A Fuzzy Decision Making Method, *Applied Research in Quality of Life*, 6 (4), 349–361.
- Cavallaro F., Zavadskas E. K., Raslanas S., (2016), Evaluation of Combined Heat and Power (CHP) Systems Using Fuzzy Shannon Entropy and Fuzzy TOPSIS, *Sustainability*, 8 (6), 556.
- Chaghooshi A. J., Fathi M. R., Kashef M., (2012), Integration of Fuzzy Shannon's Entropy with Fuzzy TOPSIS for Industrial Robotic System Selection, *Journal of Industrial Engineering and Management*, 5 (1), 102–114.
- Churchman C. W., Ackoff R. L., (1954), An Approximate Measure of Value, *Journal of Operations Research Society of America*, 2 (1), 172–187.
- Czogala E., Pedrycz W., (1985), *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, PWN, Warszawa.
- Deni W., Sudana O., Sasmita A., (2013), Analysis and Implementation Fuzzy Multi-Attribute Decision Making SAW Method for Selection of High Achieving Students in Faculty Level, *International Journal of Computer Science*, 10/1–2, 674–680.
- Garg H., Agarwal N., Tripathi A., (2015), Entropy Based Multi-criteria Decision Making Method Under Fuzzy Environment and Unknown Attribute Weights, *Global Journal of Technology and Optimization*, 6 (3), 13–20.

- Gupta S., Gupta A., (2012), A Fuzzy Multi Criteria Decision Making Approach for Vendor Evaluation in a Supply Chain, *Interscience Management Review*, 2 (3), 10–16.
- Hwang C. L., Yoon K., (1981), *Multiple Attribute Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer.
- Kacprzak D., (2017), Objective Weights Based on Ordered Fuzzy Numbers for Fuzzy Multiple Criteria Decision Making Methods, *Entropy*, 19 (7), 373.
- Kaufmann A., Gupta M. M., (1988), *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam, N.Y.
- Kobryń A., (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji w gospodarowaniu przestrzenią*, Difin, Warszawa.
- Lin H. Y., Liao C. J., Chang Y. H., (2010), Applying Fuzzy Simple Additive Weighting System to Health Examination Institution Location Selection, *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 646–650.
- Lotfi F. H., Fallahnejad R., (2010), Imprecise Shannon's Entropy and Multi Attribute Decision Making, *Entropy*, 12, 53-62.
- Roszkowska E., Kacprzak D., (2016), The Fuzzy SAW and Fuzzy TOPSIS Procedures Based on Ordered Fuzzy Numbers, *Information Sciences*, 369, 564-584.
- Sagar M. K., Jayaswal P., Kushwah K., (2013), Exploring Fuzzy SAW Method for Maintenance Strategy Selection Problem of Material Handling Equipment, *International Journal of Current Engineering and Technology*, 3 (2), 600–605.
- Shahmardan A., Zadeh M. H., (2013), An Integrated Approach for Solving a MCDM Problem, Combination of Entropy Fuzzy and F-PROMETHEE Techniques, *Journal of Industrial Engineering and Management*, 6 (4), 1124-1138.
- Shemshadi A., Shirazi H., Toreihi M., Tarokh M. J., (2011), A Fuzzy VIKOR Method for Supplier Selection Based on Entropy Measure for Objective Weighting, *Expert Systems with Applications*, 38 (10), 12160–12167.
- Wang T. C., Lee H. D., (2009), Developing a Fuzzy TOPSIS Approach Based on Subjective Weights and Objective Weights, *Expert Systems with Applications*, 36, 8980–8985.
- Zadeh L. A., (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zhang Y., Wang Y., Wang J., (2014), Objective Attributes Weights Determining Based on Shannon Information Entropy in Hesitant Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-7.
- Zoraghi N., Amiri M., Talebi G., Zowghi M., (2013), A Fuzzy MCDM Model with Objective and Subjective Weights for Evaluating Service Quality in Hotel Industries, *Journal of Industrial Engineering International*, 9 (1), 1–13.

ROZMYTA METODA SAW Z WAGAMI UZYSKANymi ZA POMOCĄ ROZMYTEJ ENTROPII

Streszczenie

W pracy przedstawiono nowe podejście do rozmytej metody SAW, w której wykorzystano rozmytą entropię. Umożliwia ono wskazanie wariantu końcowego za pomocą metody FSAW, gdy decydenci wykorzystują liczby rozmyte lub

zmiennie lingwistyczne. Ponadto prezentowana metoda pozwala uniknąć subiektywizmu decydenta i nieprecyzyjność spowodowanej przez niepełną wiedzę, osądy, opinie i preferencje decydentów.

Słowa kluczowe: liczby rozmyte, metoda SAW, entropia, wagi obiektywne, zmiennie lingwistyczne

THE FUZZY SAW METHOD AND WEIGHTS DETERMINED BASED ON FUZZY ENTROPY

Abstract

The paper presents a new approach to the fuzzy SAW method, which uses fuzzy entropy. It allows to identify the best alternative by the application FSAW method if decision makers use fuzzy numbers or linguistic variables. Moreover, the presented method allows to avoid subjectivity and imprecision caused by incomplete knowledge, judgments, opinions and preferences of decision makers.

Keywords: fuzzy numbers, SAW method, entropy, objective weights, linguistic variables

Piotr DUDZIŃSKI¹

Wpływ czynników niematerialnych na popyt na ubezpieczenie i samoubezpieczenie majątkowe

1. WSTĘP

Istnieje duża liczba prac opisujących wyniki empirycznych badań wpływu rozmaitych czynników na popyt na usługi ubezpieczeniowe. Lista czynników jest długa, są one najczęściej dzielone na cztery grupy: ekonomiczne, demograficzne, społeczne i kulturowe oraz strukturalne. Ich szczegółowy przegląd wraz z listą prac dokumentujących poszczególne efekty można znaleźć w pracach Bednarczyk (2011) i Outreville (2011, 2013). Autorzy cytują ponad 80 empirycznych prac dotyczących determinantów rynkowego popytu na ubezpieczenia różnego rodzaju. Ponadto, rozwijana jest teoria indywidualnego popytu na ubezpieczenia wykorzystująca modele matematyczne procesu decyzyjnego osoby ubezpieczającej się. Podstawowymi determinantami indywidualnego popytu na ubezpieczenia majątkowe są zamożność decydenta, poziom jego awersji do ryzyka, cena ubezpieczenia, obecność innych źródeł ryzyka. Przegląd głównych wyników w tej materii można znaleźć np. w pracy Schlesingera (2000). Istnieje jednak niewielka ilość prac teoretycznych dotyczących wpływu niematerialnych czynników na decyzje ubezpieczeniowe. Wyjątkiem jest praca Rey (2003) w której rozważane jest uogólnienie twierdzenia Mossina o optymalnym ubezpieczeniu. Rey podaje warunki pod którymi wprowadzenie dodatkowego źródła niematerialnego ryzyka do modelu nie ma wpływu na tezę twierdzenia Mossina. Warto także wymienić pracę Lee (2005) w której badany jest efekt dochodowy na samoubezpieczenie w modelu uwzględniającym także stan zdrowia decydenta. Prace Eeckoudt i inni (2007), Courbage, Rey (2007), Menegatti (2009), De-nuit i inni (2011), Mace (2015) poświęcone są analizie wpływu ryzyka związanego ze zdrowiem decydenta na wysokość jego oszczędności. Ponadto Crainich i inni (2017) badali wpływ stanu zdrowia na skład portfela inwestycyjnego decydenta. Oprócz wspomnianego artykułu Rey, brak jest prac teoretycznych na temat wpływu zmian stanu zdrowia na indywidualny popyt na ubezpieczenie (majątkowe). Niniejsza praca w pewnym stopniu wypełnia tę lukę. Intuicyjny pogląd, że czynniki niematerialne, a szczególnie stan zdrowia mogą mieć jakiś wpływ na decyzje ubezpieczeniowe został w tym artykule zweryfikowany pozy-

¹ Wyższa Szkoła Bankowa w Gdańsku, Katedra Zastosowań Informatyki w Zarządzaniu, al. Grunwaldzka 238A, 80-266 Gdańsk, Polska, e-mail: pd@mat.ug.edu.pl.

tywnie, jednak opis tej relacji wymaga wprowadzenia ogólniejszego modelu, niż standardowo używany jednowymiarowy. Zaprezentowany i przeanalizowany został typowy model ubezpieczenia uzupełniony o drugą zmienną reprezentującą czynnik niematerialny (stan zdrowia). Główny wynik pracy mówi że pogorszenie stanu zdrowia powoduje wzrost popytu na ubezpieczenie majątkowe, o ile są spełnione założenia dotyczące znaków pochodnych cząstkowych użyteczności rzędu drugiego i trzeciego, wyrażające tzw. komplementarność zdrowia i bogactwa oraz krzyżową przezorność względem zdrowia. Są to relatywnie nowe pojęcia w literaturze ekonomicznej, najczęściej do tej pory używane były w pracach teoretycznych dotyczących analizy zjawiska oszczędności w kontekście zmian stanu zdrowia.

W drugiej części artykułu jest przedstawiona analogiczna analiza dotycząca innego narzędzia zarządzania ryzykiem, jakim jest samubezpieczenie. Wyniki, mimo że podobne do tych na temat ubezpieczenia, zależą dodatkowo od własności określonej jako typ efektywności samubezpieczenia, która z kolei odzwierciedla technologię usuwania szkody. Pogorszenie stanu zdrowia może w zależności od typu efektywności samubezpieczenia podnieść popyt na samubezpieczenie, albo je zredukować. Ponownie, kluczowe dla wyniku są znaki drugiej i trzeciej pochodnej cząstkowej użyteczności.

2. UOGÓLNIONY MODEL UBEZPIECZENIA I JEGO ANALIZA

Analiza problemu wymaga użycia uogólnionej funkcji użyteczności której zmiennymi są stan majątkowy danej osoby oraz poziom rozważanego czynnika niematerialnego. Problematyczną kwestią jest pomiar drugiej zmiennej. W przypadku zdrowia powszechnie przyjętą miarą jest tzw. kapitał zdrowotny (ang. *health capital*), jednostką jego pomiaru jest QALY (Cutler, Richardson, 1997).

Użyteczność decydenta jest opisana dwuargumentową funkcją $u(w, h)$, gdzie w oznacza stan majątkowy, zaś h – stan zdrowia danej osoby. Zakłada się że funkcja użyteczności jest rosnąca ze względu na każdy z tych czynników, czyli że

$$\frac{\partial u}{\partial w} = u_w > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial h} = u_h > 0.$$

Zakładamy też, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = u_{ww} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial h \partial w} = u_{wh} > 0. \quad (1)$$

Pierwsza z nierówności oznacza że decydent wykazuje awersję do ryzyka (monetarnego) na każdym poziomie zdrowia². Druga nierówność wskazuje na to, że

² W teorii decyzji opartej na maksymalizacji oczekiwanej użyteczności znany jest fakt, że osoby neutralne wobec ryzyka lub skłonne do niego nie podejmują pozytywnej decyzji o ubezpieczeniu, patrz np. Heilpern (2001).

krańcowa użyteczność stanu majątkowego rośnie wraz z wzrostem poziomu zdrowia. Mówi się wtedy że bogactwo i zdrowie są dobrami komplementarnymi w sensie Edgewortha.

Z czterech powyższych, trzy pierwsze nierówności odzwierciedlają typowe własności funkcji użyteczności. Ostatnia nierówność jest potwierdzona empirycznie (Viscusi, Evans, 1990; Sloan i inni, 1998; Finkelstein i inni, 2008, 2013) i często pojawia się jako założenie w literaturze ekonomicznej, jednakże istnieją dane sugerujące możliwość wystąpienia innych typów zachowań. Pod koniec rozdziału będzie zaprezentowany przegląd literatury i wyników badań dotyczących tego zagadnienia.

Niech w_0 oznacza początkowy stan majątkowy osoby. Majątek ten jest zagrożony stratą wyrażoną zmienną losową \tilde{x} o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Cena pełnego ubezpieczenia od straty wynosi P , zaś ubezpieczający się podejmuje decyzję jaką część straty pokrywa ubezpieczenie. Wielkość tę oznaczamy symbolem α . Jest ona zmienną decyzyjną przyjmującą wartości z przedziału domkniętego $[0,1]$. Zatem za cenę αP ubezpieczyciel zwróci ubezpieczonemu kwotę wysokości αx . Majątek końcowy wynosi więc

$$w = w_0 - \alpha P - x + \alpha x.$$

Problem decydenta polega więc na takim wyborze zmiennej α , aby zmaksymalizować oczekiwaną użyteczność:

$$Eu(w, h) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(w_0 - \alpha P - x + \alpha x, h) f(x) dx,$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją gęstości zmiennej losowej \tilde{x} .

Warunek pierwszego rzędu (konieczny dla istnienia maksimum) jest postaci

$$E[u_w(w_0 - \alpha P - \tilde{x} + \alpha \tilde{x}, h) \cdot (\tilde{x} - P)] = 0. \quad (2)$$

Warunek drugiego rzędu (wystarczający dla istnienia ekstremum)

$$E[u_{ww}(w_0 - \alpha P - \tilde{x} + \alpha \tilde{x}, h) \cdot (\tilde{x} - P)^2] < 0 \quad (3)$$

jest spełniony na mocy założenia (1). Istnieje więc optymalny punkt α^* spełniający warunek (2), o którym zakładamy, że jest wewnętrzny. Interpretuje się tę wielkość jako indywidualny popyt na ubezpieczenie. Celem niniejszej analizy jest zbadanie relacji między wielkościami h i α^* , czyli określenie czy i jak zmiany

w stanie zdrowia przekładają się na decyzję o ubezpieczeniu majątkowym. Relację tę opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeśli decydent wykazuje krzyżową przezorność względem zdrowia, oraz zdrowie i majątek są dla niego komplementarne, tzn. jeśli zachodzą nierówności $u_{hw} > 0$ i $u_{hww} > 0$, to pogorszenie (polepszenie) stanu zdrowia powoduje wzrost (redukcję) popytu na ubezpieczenie majątkowe.

Dowód: W sensie matematycznym popyt na ubezpieczenie jest tzw. uwikłaną funkcją poziomu zdrowia, co wyraża równanie (2). Zapisane w ogólnej formie ma ono postać

$$F(h, \alpha^*(h)) = 0$$

(pozostałe parametry występujące we wzorze (2) traktujemy jako stałe). Zróżniczkowanie względem zmiennej h obu stron powyższego równania przy użyciu wzoru na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych prowadzi do równości

$$\frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^*} \cdot \frac{d\alpha^*}{dh} = 0,$$

co daje

$$\frac{d\alpha^*}{dh} = - \frac{\partial F / \partial h}{\partial F / \partial \alpha^*}. \quad (4)$$

Zauważmy, że $\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}$, oraz że na mocy warunku wystarczającego ekstremum (3) zachodzi

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = \frac{d^2 Eu}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha^*} < 0.$$

Analizując znaki wyrażenia po prawej stronie równania (4) otrzymujemy wniosek

$$\text{sgn} \left(\frac{d\alpha^*}{dh} \right) = \text{sgn} \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right). \quad (5)$$

Wyrażenie $\frac{d\alpha^*}{dh}$ można określić mianem „efektu zdrowotnego” przez analogię do efektu dochodowego. Aby określić znak efektu zdrowotnego, będziemy badać znak pochodnej $\frac{\partial F}{\partial h}$.

Różniczkując więc równanie (2) względem h dostajemy

$$F_h = E[u_{wh}(w_0 - \alpha P - \tilde{x} + \alpha \tilde{x}, h) \cdot (\tilde{x} - P)]. \quad (6)$$

Badanie znaku powyższego wyrażenia oprzemy na koncepcji warunku „pojedynczego przejścia” która pojawiła się po raz pierwszy w pracy Diamonda, Stiglitz (1974), a obecnie jest często używana w statyce porównawczej. Matematycznie opiera się ona na poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja ciągła $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek pojedynczego przejścia, tzn. istnieje x_0 takie że

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0 \text{ dla } x > x_0, \\ \varphi(x) < 0 \text{ dla } x < x_0, \end{cases}$$

oraz zachodzi warunek

$$\int_a^b \varphi(x) dx = 0,$$

to dla dowolnej funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rosnącej i dodatniej zachodzi nierówność

$$\int_a^b \varphi(x)g(x)dx > 0.$$

Jeśli funkcja g jest malejąca, to zachodzi nierówność

$$\int_a^b \varphi(x)g(x)dx < 0.$$

Dowód: patrz Diamond, Stiglitz (1974).

Warunek pojedynczego przejścia mówi, że dana funkcja zmienia znak jeden raz, z „minus” na „plus”. Spełnia to założenie czynnik $(\tilde{x} - P)$ w wyrażeniu (6), ale pozostałe założenia Twierdzenia 2 nie są spełnione. Aby jednak zastosować powyższe twierdzenie, należy najpierw przekształcić wyrażenie (6):

$$\begin{aligned} F_h &= E[u_{wh}(w, h) \cdot (\tilde{x} - P)] = E\left[\frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \cdot u_w(w, h) \cdot (x - P)\right] = \\ &= \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \cdot u_w(w, h) \cdot (x - P) f(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Zauważmy, że czynnik $\varphi(x) = u_w(w, h) \cdot (x - P)f(x)$ spełnia warunek pojedynczego przejścia (bo czynnik $(x - P)$ zmienia znak jeden raz, a ponadto $f(x) > 0$ i z założenia $u_w(w, h) > 0$) oraz zachodzi równość

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u_w(w, h) \cdot (\tilde{x} - P) f(x) dx = 0,$$

która jest warunkiem pierwszego rzędu istnienia ekstremum (2). Aby móc zastosować Twierdzenie 2 potrzebna jest wiedza na temat monotoniczności czynnika

$$g(x) = \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)}$$

względem zmiennej x . Aby się tego dowiedzieć, należy zbadać znak pochodnej funkcji złożonej:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u_{hww}u_w - u_{wh}u_{ww}}{(u_w)^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (8)$$

Przypomnijmy, że

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha - 1 < 0.$$

Ponadto, z założenia (1) $u_w > 0$, $u_{ww} < 0$ oraz $u_{wh} > 0$. Zauważmy, że jeśli $u_{hww} > 0$ to $u_{hww}u_w - u_{wh}u_{ww} > 0$, a zatem znak całego wyrażenia (8) jest ujemny. To oznacza że czynnik

$$g(x) = \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)}$$

jest malejący względem zmiennej x . Nierówność $u_{hww} > 0$ jest w literaturze ekonomicznej określana mianem krzyżowej przezorności względem zdrowia. W podrozdziale 2.1 zostanie zaprezentowana interpretacja ekonomiczna i rys historyczny tego pojęcia.

Można teraz zastosować drugą część Twierdzenia 2, którego teza mówi że

$$F_h = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \cdot u_w(w, h) \cdot (x - P) f(x) dx < 0,$$

a zatem na mocy spostrzeżenia (5)

$$\frac{d\alpha^*}{dh} < 0,$$

co dowodzi tezy Twierdzenia 1.

Interpretacja ekonomiczna założeń

Znak pochodnej cząstkowej mieszanej drugiego rzędu u_{hw} informuje jak zmiana stanu zdrowia przekłada się na krańcową użyteczność konsumpcji. Jeśli zachodzi $u_{hw} > 0$, to znaczy, że pogorszenie stanu zdrowia powoduje redukcję krańcowej użyteczności bogactwa. W takim przypadku mówi się, że bogactwo i zdrowie są komplementarne w sensie Edgewortha. Uzasadnienie teoretyczne tej właściwości bazuje na założeniu iż choroba powoduje obniżenie efektywności transformacji konsumpcji w użyteczność. Jeśli $u_{hw} < 0$, to pogorszenie stanu zdrowia przekłada się na wzrost krańcowej użyteczności majątku. Mówi się wówczas, że bogactwo i zdrowie są substytutami. Obie postawy są możliwe i istnieje szereg prac potwierdzających je empirycznie. Komplementarność bogactwa i zdrowia została empirycznie potwierdzona w pracach Viscusi, Evansa (1990), Sloan i inni (1998), Finkelsteina i inni (2008, 2013). Substytucyjność bogactwa i zdrowia została potwierdzona badaniami Lillarda, Weissa (1997), Edwardsa (2008) i Tengstama (2014). Różnice między wynikami wspomnianych autorów mogą wynikać m. in. z różnych typów chorób wśród badanych populacji. Przykładowo Tengstam (2014) badał użyteczność krańcową osób z paraliżem nóg, zaś Finkelstein i inni (w tym samym roku) badali osoby chore m. in. na raka, artretyzm, choroby płuc i serca. Nie ma więc zasadniczej sprzeczności między ich wynikami, dotyczą one innych przypadków.

Nierówność $u_{hww} > 0$ wyraża własność użyteczności nazywaną krzyżową przezornością względem zdrowia (ang. *cross-prudence in health*). Pojęcie to po raz pierwszy pojawiło się w pracy Eeckhoudt i inni (2007) dla opisu interakcji między stanem zdrowia a skłonnością do podejmowania ryzyka finansowego. Decydent wykazuje krzyżową przezorność względem zdrowia, gdy preferuje to samo czyste ryzyko finansowe w lepszym stanie zdrowia niż w gorszym. Warunek ten jest równoważny wypukłości względem bogactwa użyteczności krańcowej względem zdrowia, co jest równoważne nierówności $u_{hww} > 0$. Pojęcie to zostało wielokrotnie użyte w analizie zjawiska oszczędności jako narzędzia zarządzania ryzykiem utraty zdrowia, w pracach Eeckhoudt i inni (2007), Co-urbage, Rey (2007), Menegatti (2009), Denuit i inni (2011), Mace (2015). Ostatnio zostało ono użyte w pracy Crainich i inni (2017) dla objaśnienia wpływu stanu zdrowia na skład portfela inwestycyjnego decydenta.

3. UOGÓLNIONY MODEL SAMOUBEZPIECZENIA I JEGO ANALIZA

Samoubezpieczenie jest definiowane jako indywidualna inwestycja powodująca redukcję straty w przypadku wystąpienia szkody (Ehrlich, Becker, 1972). W odróżnieniu od ubezpieczenia, nie występuje tu transfer ryzyka za opłatą na podmiot zewnętrzny, tylko indywidualna aktywność danej osoby redukująca rozmiar ewentualnej straty. Przykładami samoubezpieczenia są: zakup gaśnic

lub zraszaczy przeciwpożarowych, sejfów na kosztowności, itp. Z kolei wykrywacze dymu, alarmy przeciwwłamaniowe redukują prawdopodobieństwo wystąpienia szkody niż samą szkodę; są to przykłady prewencji – pojęcia wprowadzonego do literatury ekonomicznej równoległe z samoubezpieczeniem przez Ehrlicha i Beckera. Samoubezpieczenie jest kolejnym narzędziem zarządzania ryzykiem. Analizie jego podstawowych własności poświęcone są prace badaczy takich jak Ehrlich, Becker (1972), Dionne, Eeckhoudt (1985) oraz Briys, Schlesinger (1990). Autorzy ci wykazali, że popyt na samoubezpieczenie ma cechy upodabniające je do ubezpieczenia majątkowego: jest monotoniczny względem awersji do ryzyka (osoby bardziej niechętnie ryzyku wykazują zwiększony popyt na samoubezpieczenie), określono kierunek efektu dochodowego (przy standardowym założeniu DARA³ jest to dobro podrzędne), oraz wykazano, że samoubezpieczenie jest substytutem ubezpieczenia majątkowego. Prace Lee (2010 a, b) zmieniły jednak postrzeganie samoubezpieczenia. Lee wprowadził ogólniejszy, bardziej realistyczny model samoubezpieczenia (z wieloma stanami świata zamiast dwoma, jak we wcześniejszej literaturze tematu) z którego wynika, że w zależności od typu samoubezpieczenia może być ono dobrem podrzędnym, jak i normalnym. Ponadto wzrost awersji do ryzyka może podnosić lub obniżać popyt na samoubezpieczenie. W pracy Dudziński (2014) wykazano, że pewnych sytuacjach samoubezpieczenie może być również komplementarne względem ubezpieczenia majątkowego. Wszystko to świadczy o tym, że samoubezpieczenie jest wartym dalszego badania instrumentem zarządzania ryzykiem.

Niech w_0 oznacza początkowy stan majątkowy osoby. Podobnie jak w przypadku ubezpieczenia, majątek ten jest zagrożony stratą, sytuacja jest jednak bardziej skomplikowana gdyż rozmiar straty będzie teraz zależeć także od aktywności decydenta. Załóżmy że stany świata są reprezentowane przez parametr losowy $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, którego wartości są uporządkowane w ten sposób, że większa wartość θ odpowiada gorszej sytuacji (większej stracie).

Niech e oznacza wielkość inwestycji w samoubezpieczenie. Rozmiar straty zależy od dwóch czynników: stanu świata (zmiennej losowej) i inwestycji w samoubezpieczenie (zmiennej decyzyjnej). Wielkość straty w stanie θ przy inwestycji e w samoubezpieczenie oznaczana będzie przez $l(e, \theta)$. Z definicji, inwestycja w samoubezpieczenie redukuje stratę, co wyrażone jest nierównością

$$l_e(e, \theta) < 0. \quad (9)$$

Zakłada się, że straty maleją coraz wolniej ze wzrostem kwoty wydanej na samoubezpieczenie, co oznacza że zachodzi

³ Malejąca bezwzględna awersja do ryzyka.

$$l_{ee}(e, \theta) \geq 0. \quad (10)$$

Z założenia o uporządkowaniu wartości parametru θ wynika nierówność

$$l_{\theta}(e, \theta) \geq 0. \quad (11)$$

Bogactwo końcowe w stanie θ i przy inwestycji e jest równe

$$w(e, \theta) = w_0 - l(e, \theta) - e. \quad (12)$$

Problem decydenta polega na takim wyborze wartości zmiennej e , aby zmaksymalizować oczekiwaną użyteczność:

$$Eu(w, h) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} u(w_0 - l(e, \theta) - e, h) f(\theta) d\theta.$$

Zachowujemy wszystkie wcześniejsze założenia na temat dwuargumentowej funkcji użyteczności.

Warunek pierwszego rzędu jest postaci

$$\frac{\partial Eu}{\partial e} = E[u_w(w_0 - l(e, \theta) - e, h) \cdot (-1 - l_e)] = 0. \quad (13)$$

Warunek drugiego rzędu jest spełniony na mocy założeń:

$$E[u_{ww} \cdot (-1 - l_e)^2 + u_w \cdot (-l_{ee})] < 0.$$

Istnieje optymalny punkt e^* spełniający warunek (13), o którym zakładamy, że jest wewnętrzny.

Zauważmy, że czynnik $(-1 - l_e)$ występujący w równaniu (13) musi przynajmniej raz zmieniać znak, gdyż w przeciwnym przypadku miałby stały znak i optymalne byłoby rozwiązanie brzegowe, a nie wewnętrzne.

Relację między stanem zdrowia a optymalnym poziomem samoubezpieczenia opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Załóżmy że decydent wykazuje krzyżową przezorność względem zdrowia, oraz zdrowie i majątek są dla niego komplementarne, tzn. $u_{hw} > 0$ i $u_{hww} > 0$. Wówczas:

a) jeśli czynnik $(-1 - l_e)$ zmienia znak jeden raz, z ujemnego na dodatni, to pogorszenie (polepszenie) stanu zdrowia powoduje wzrost (redukcję) popytu na samoubezpieczenie,

b) jeśli czynnik $(-1 - l_e)$ zmienia znak jeden raz, z dodatniego na ujemny, to pogorszenie (polepszenie) stanu zdrowia powoduje redukcję (wzrost) popytu na samoubezpieczenie.

Dowód: Postępując analogicznie do analizy przedstawionej w poprzednim rozdziale, po zróżniczkowaniu równania (13) względem zmiennej h , otrzymamy relację

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{\partial e^*}{\partial h} \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right). \quad (14)$$

Obliczając pochodną i przekształcając wyrażenie tak jak w poprzednim rozdziale otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_h &= E u_{wh}(w, h)(-1 - l_e) = E \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} u_w(w, h)(-1 - l_e) = \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} u_w(w, h)(-1 - l_e) f(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Dla zastosowania Twierdzenia 2 potrzebna jest wiedza na temat monotoniczności czynnika

$$g(\theta) = \frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)}$$

względem zmiennej θ . Obliczamy pochodną funkcji złożonej:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{u_{wh}(w, h)}{u_w(w, h)} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{u_{hw}u_w - u_{wh}u_{ww}}{(u_w)^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (16)$$

gdzie $\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{\partial l}{\partial \theta} \leq 0$ z założenia (11). Zatem obliczana pochodna ma znak przeciwny do wyrażenia $u_{hw}u_w - u_{wh}u_{ww}$. Jeśli założymy $u_{hww} \geq 0$ i $u_{wh} \geq 0$, to otrzymamy nierówność $u_{hw}u_w - u_{wh}u_{ww} \geq 0$, co oznacza że wyrażenie (16) jest ujemne, co z kolei dowodzi że funkcja $\frac{u_{wh}}{u_w}$ jest malejąca względem parametru θ . Dowód ponownie opiera się na Twierdzeniu 2, ale jego użycie jest teraz nieco utrudnione w porównaniu z poprzednim rozdziałem, gdyż sytuacja jest bardziej złożona. Czynnik $(-1 - l_e)$ w całce (15) zmienia znak, ale niekoniecznie w sekwencji z „minus” na „plus”. Pojedyncza zmiana znaku może być również odwrotna, zaś oba przypadki mają inną interpretację ekonomiczną, co zostanie wyjaśnione w akapicie na końcu rozdziału. Aby ponownie skorzystać z Twierdzenia 2, zauważmy że jeśli znak czynnika $(-1 - l_e)$ zmienia się z dodatniego na ujemny, to wyrażenie $-(-1 - l_e)$ spełnia założenie Twierdzenia 2, zaś szukany znak całki zmienia się na przeciwny. Dowodzi to tezy twierdzenia 2.

Interpretacja ekonomiczna założeń

Pochodna cząstkowa $w_e(e, \theta) = -1 - l_e(e, \theta)$ jest równa krańcowemu bogactwu końcowemu względem samoubezpieczenia. Jeśli jest ona ujemna, to oznacza że jednostkowy wzrost inwestycji w samoubezpieczenie daje efekt redukcji bogactwa końcowego, zaś jeśli jest dodatnia, to otrzymujemy wzrost bogactwa końcowego. Pochodną w_e nazywa się efektywnością samoubezpieczenia. W całce (15) jest ona uwzględniona jako funkcja parametru θ , czyli stanu świata. Zmiana jej znaku z ujemnego na dodatni oznacza, że samoubezpieczenie jest bardziej skuteczne przy dużych stratach, niż przy małych (analogicznie do ubezpieczenia majątkowego rozważanego w poprzednim rozdziale). Przykładem takiego samoubezpieczenia jest wynajęcie drogiego prawnika wyspecjalizowanego w określonym typie spraw. Zmiana znaku z dodatniego na ujemny oznacza że samoubezpieczenie jest skuteczniejsze przy małych stratach, zaś przy dużych jest nieefektywne. Przykładem jest zakup gaśnic przeciwpożarowych. Ogólnie, kierunek zmiany znaku efektywności samoubezpieczenia informuje o typie technologii usuwania strat przez dane samoubezpieczenie. Zauważmy że przypadek a) Twierdzenia 3 jest analogiczny do Twierdzenia 1 na temat ubezpieczenia majątkowego. Jednak przypadek b) jest odmienny i patrząc na przykłady, wydaje się być typowy dla samoubezpieczenia. Jest to narzędzie zarządzania ryzykiem wiążące się na ogół z prywatną inwestycją niewielkich środków finansowych; stąd wynika lepsza efektywność samoubezpieczenia przy małych stratach niż przy dużych. Twierdzenie 3 pokazuje więc także w jakich przypadkach samoubezpieczenie upodabnia się do ubezpieczenia majątkowego, a w jakich się od niego istotnie odróżnia stanowiąc odmienne narzędzie zarządzania ryzykiem.

4. PODSUMOWANIE

Przeprowadzona w artykule analiza pozwala zweryfikować intuicyjne przekonanie o tym, że czynniki niematerialne, w szczególności stan zdrowia, mają pewne znaczenie przy podejmowaniu decyzji dotyczących ubezpieczenia oraz samoubezpieczenia majątkowego. Związek ten jednak nie jest oczywisty i jak się okazuje, występuje przy określonych założeniach dotyczących funkcji użyteczności decydenta. Założenia te dotyczą pochodnych cząstkowych rzędu drugiego i trzeciego; określane są jako komplementarność zdrowia i bogactwa oraz krzyżowa przezorność względem zdrowia. Przy tych założeniach, pogorszenie stanu zdrowia powoduje wzrost popytu na ubezpieczenie majątkowe. W przypadku samoubezpieczenia dodatkowym czynnikiem jest typ efektywności samoubezpieczenia; w zależności od niego może nastąpić wzrost lub spadek popytu.

Zaprezentowany i analizowany w artykule model nie uwzględnia innych, dodatkowych źródeł ryzyka. Noszą one wspólną nazwę ryzyka w tle (ang. *background risk*) zaś ich cechą charakterystyczną jest to że nie podlegają bezpośrednio ubezpieczeniu. Egzogeniczne ryzyko w tle może mieć różną naturę i pochodzenie. Może dotyczyć majątku decydenta lub jego zdrowia. Uwzględnienie ryzyka w tle w opisywanym modelu i zrozumienie jego wpływu na decyzje ubezpieczeniowe jest ciekawym przyszłym zagadnieniem badawczym.

Innym interesującym przyszłym zagadnieniem badawczym byłoby stworzenie modelu decyzyjnego dotyczącego jednocześnie dwóch rodzajów ubezpieczenia: majątkowego i zdrowotnego (dodatkowego względem powszechnego) dla ustalenia ich interakcji. Oba typy ubezpieczeń służą do zarządzania innymi źródłami ryzyka, ale wyniki tego artykułu (jak i cytowane prace) wskazują że przy pewnych założeniach istnieją krzyżowe efekty pomiędzy zdrowiem i decyzjami dotyczącymi zarządzania ryzykiem.

LITERATURA

- Bednarczyk T. H., (2011), Ekonomiczne i instytucjonalne czynniki rozwoju ubezpieczeń, *Wiadomości Ubezpieczeniowe*, 4, 85–106.
- Briys E., Schlesinger H., (1990), Risk Aversion and the Propensities for Self-Insurance and Self-Protection, *Southern Economic Journal*, 57 (2), 458–467.
- Courbage C., Rey B., (2007), Precautionary Saving in the Presence of Other Risks, *Economic Theory* 32, 417–424.
- Crainich D., Eeckhoudt L., Le Courtois O., (2017), Health and Portfolio Choices: A Diffidence Approach, *European Journal of Operational Research*, 259 (1), 273–279.
- Cutler D. M., Richardson E., (1997), Measuring the Health of the U.S. Population, *Brookings Papers on Economic Activity. Microeconomics*, 28, 217–282.
- Denuit M. M., Eeckhoudt L., Menegatti M., (2011), Correlated Risks, Bivariate Utility and Optimal Choices, *Economic Theory*, 46, 39–54.
- Diamond P., Stiglitz J., (1974), Increases in Risk and in Risk Aversion, *Journal of Economic Theory* 8, 337–360.
- Dionne G., Eeckhoudt L., (1985), Self-Insurance, Self-Protection and Increasing Risk Aversion, *Economics Letters*, 17 (1–2), 39–42.
- Dudziński P., (2014), Insurance and Self-Insurance – Substitutes or Complements?, *Przegląd Statystyczny*, 3, 307–315.
- Edwards R., (2008), Health Risk and Portfolio Choice, *Journal of Business and Economic Statistics*, 26 (4), 472–485.
- Eeckhoudt L., Rey B., Schlesinger H., (2007), A Good Sign For Multivariate Risk Taking, *Management Science*, 53, 117–124.
- Ehrlich I., Becker G. S., (1972), Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection, *Journal of Political Economy*, 80 (4), 623–648.
- Finkelstein A., Luttmer E., Notowidigdo M., (2009), Approaches to Estimating the Health State Dependence of the Utility Function, *American Economic Review, Papers and Proceedings*, 99 (2), 116–21.

- Finkelstein A., Luttmer E., Notowidigdo M., (2013), What Good Is Wealth Without Health? The Effect of Health on the Marginal Utility of Consumption, *Journal of the European Economic Association*, 11 (1), 221–258.
- Heilpern S., (2001), *Podjęwanie decyzji w warunkach niepewności i ryzyka*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Lee K., (2005), Wealth Effects on Self-Insurance and Self-Protection Against Monetary and Non-monetary Losses, *The Geneva Risk and Insurance Review*, 30, 147–159.
- Lee K., (2010a), Risk Aversion and Self-Insurance, *Journal of Economics*, 101, 277–282.
- Lee K., (2010b), Wealth Effects on Self-Insurance, *The Geneva Risk and Insurance Review*, 35, 160–171.
- Lillard L. A., Weiss Y., (1997), Uncertain Health and Survival: Effects of End-of-Life Consumption, *Journal of Business and Economic Statistics*, 15 (2), 254–268.
- Mace S., (2015), Saving and Perceived Health Risks, *Review of Economics of the Household*, 13 (1), 37–52.
- Menegatti M., (2009), Optimal Prevention and Prudence in a Two-period Model, *Mathematical Social Sciences*, 58, 393–397.
- Outreville J. F., (2011), The Relationship Between Insurance Growth and Economic Development: 80 Empirical Papers for a Review of the Literature, ICER Working Paper 12–2011.
- Outreville J. F., (2013), The Relationship Between Insurance and Economic Development: 85 Empirical Papers for a Review of the Literature, *Risk Management and Insurance Review*, 16, 71–122.
- Rey B., (2003), A Note on Optimal Insurance in the Presence of a Nonpecuniary Background Risk, *Theory and Decision*, 54, 73–83.
- Schlesinger H., (2000), The Theory of Insurance Demand, w: Dionne G., (red.), *Handbook of Insurance*, Boston, Kluwer Academic Publishers, 131–151.
- Sloan F., Viscusi K., Chesson H., Conover C., Whetten-Goldstein K., (1998), Alternative Approaches to Valuing Intangible Health Losses: The Evidence for Multiple Sclerosis, *Journal of Health Economics*, 17 (4), 475–497.
- Tengstam S., (2014), Disability and Marginal Utility of Income: Evidence From Hypothetical Choices, *Health Economics*, 23 (3), 268–82.
- Viscusi K., Evans W., (1990), Utility Functions That Depend on Health Status: Estimates and Economic Implications, *American Economic Review*, 80 (3), 353–374.

WPŁYW CZYNNIKÓW NIEMATERIALNYCH NA POPYT NA UBEZPIECZENIE I SAMOUBEZPIECZENIE MAJĄTKOWE

Streszczenie

W artykule została przeprowadzona analiza wpływu czynników niematerialnych (zdrowia) na decyzje dotyczące ubezpieczenia i samoubezpieczenia majątkowego. Analiza wymaga wprowadzenia funkcji użyteczności zależnej od dwóch zmiennych. Udowodnione zostało twierdzenie mówiące że pogorszenie stanu zdrowia powoduje wzrost popytu na ubezpieczenie majątkowe, pod warunkiem spełnienia założeń dotyczących znaków pochodnych cząstkowych użyteczności rzędu drugiego i trzeciego, wyrażających komplementarność zdrowia

i bogactwa oraz krzyżową przezorność względem zdrowia. Druga część pracy poświęcona jest samoubezpieczeniu. Przy tych samych założeniach, pogorszenie stanu zdrowia może powodować wzrost lub redukcję popytu na samoubezpieczenie, w zależności od typu efektywności samoubezpieczenia.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie, samoubezpieczenie, krzyżowa przezorność względem zdrowia

THE EFFECT OF NONMONETARY FACTORS ON THE DEMAND FOR INSURANCE AND SELF-INSURANCE

Abstract

The article considers the impact of nonmonetary factors (health) on insurance and self-insurance (against material damage) decisions. Using a two-argument utility function, we prove that the health deterioration leads to increased demand for insurance if the decision-maker is cross-prudent in health and if wealth and health are complements. Those conditions are equivalent to positivity of second and third order degree cross-derivatives of the utility function. Second part of the article considers analogous effect of health deterioration on self-insurance. In this case the result depends additionally on effectivity of self-insurance as a function of the state of the world.

Keywords: insurance, self-insurance, cross-prudence in health

Waldemar FLORCZAK¹
Wojciech GRABOWSKI²

Co wpływa na wielkość popytu na porady prawne? Analiza logitowa z wykorzystaniem metody klasycznego uśredniania międzymodelowego^{3, 4}

1. WPROWADZENIE

Powszechny dostęp do pomocy prawnej jest warunkiem podmiotowości obywateli i niezbędną przesłanką równości szans wszystkich członków społeczeństwa. Jednakże dopiero ustawa z dnia 5 sierpnia 2015 r. o nieodpłatnej pomocy prawnej oraz edukacji prawnej, wdrożona z dniem 1 stycznia 2016 r., zapewniła najuboższemu w Polsce instytucjonalny dostęp do profesjonalnych porad prawnych. Tym samym kraj nasz dołączył do szerokiego grona państw demokratycznych, w których pomoc taka świadczona jest nieodpłatnie.

Akt uchwalenia ustawy poprzedziły szerokie badania prawnych i społeczno-ekonomicznych uwarunkowań funkcjonowania nieformalnego systemu pomocy prawno-obywatelskiej, obowiązującego – i wciąż funkcjonującego równolegle do obecnego systemu formalnego – przed wdrożeniem reformy. W badaniach tych, realizowanych w ramach projektu pt. „Opracowanie kompleksowych i trwałych mechanizmów wsparcia dla poradnictwa prawnego i obywatelskiego w Polsce” – współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego i kierowanych przez Instytut Spraw Publicznych w Warszawie – uczestniczyli liczni interesariusze reformy poradnictwa prawnego (ISP, Departament Pożytku Publicznego (DPP) w Ministerstwie Pracy i Polityki Społecznej, Fundacja Instytut Prawa i Społeczeństwa (INPRIS), Związek Biur Porad Obywatelskich (ZBPO) oraz Fundacja Uniwersyteckich Poradni Prawnych (FUPP)).

¹ Uniwersytet Jagielloński, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Instytut Ekonomii, Finansów i Zarządzania, ul. Prof. S. Łojasiewicza 4, 30–348 Kraków, Polska.

² Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Modeli i Prognoz Ekonometrycznych, Rewolucji 1905 r. 41, 90-214 Łódź, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: emfwog@uni.lodz.pl.

³ Opracowanie powstało w ramach realizacji grantu NCN nr 2012/07/B/HS4/02994.

⁴ Autorzy artykułu serdecznie dziękują anonimowym Recenzentom za cenne uwagi i sugestie dotyczące pierwotnej wersji artykułu. Ich wprowadzenie przyczyniło się do poprawy jakości tekstu.

Jednym z wymiernych efektów projektu było przeprowadzenie w 2012 roku ogólnopolskiego badania ankietowego beneficjentów i usługodawców nieformalnego systemu poradnictwa prawnego, którego wyniki omówiono m.in. w dwóch obszernych opracowaniach (Burdziej, Dudkiewicz, 2013; Peisert i inni, 2013). Nie zastosowano jednak metod wielowymiarowej analizy statystyczno-ekonometrycznej, ograniczając się jedynie do narzędzi statystyki opisowej. Tym samym ilościowe wnioski płynące z tych analiz pomijają szereg kluczowych założeń wnioskowania statystycznego, przede wszystkim z powodu nie uwzględnienia jednoczesności wpływu różnorodnych czynników na wielkość popytu na usługi poradnicze.

Nie jest to słabość jedynie wyżej wymienionych badań. Przegląd literatury przedmiotu pokazuje (Winczorek, 2015), że większość z istniejących badań empirycznych, stawiających sobie za cel odpowiedź na pytanie sformułowane w tytule niniejszego opracowania, bazuje na nieskomplikowanych metodach analitycznych, wykorzystujących metody statystyki opisowej (np. Legal Service Corporation, 1994; Currie, 2006; Murayama, 2007), lub proste narzędzia statystyki matematycznej, ograniczone do przestrzeni dwuwymiarowej (np. Gramatikov, 2008; Kritzer 2009). Nie podejmując się odpowiedzi na pytanie o przyczyny takiego stanu rzeczy, skonstatować należy jednak, że metodyka taka nie jest poprawna. Fakt bowiem, że na gruncie rozważań logiczno-teoretycznych wskazuje się na bardzo liczne, potencjalnie istotne czynniki mogące wpływać na prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego, zaś w praktyce stosuje się metody jednowymiarowe, nadszarpuje wiarygodność rezultatów (i wniosków) uzyskiwanych przy ich użyciu. Dlatego metody takie należałoby uznać za wskazane jedynie w kontekście badania pomocniczego, nie zaś głównego.

Wystąpienie problemu prawnego stanowi jeden z niezliczonych przejawów funkcjonowania jednostki w społeczeństwie. Aby lepiej zrozumieć ideę badania przeprowadzonego w niniejszym artykule, należy przytoczyć definicję pojęcia „problem prawny”. Respondenci byli pytani czy w okresie ostatnich 5 lat znaleźli się w sytuacji wymagającej pomocy prawnika, osoby z wykształceniem prawniczym lub instytucji/organizacji udzielającej porad prawnych. Na podstawie odpowiedzi respondentów definiowana była zmienna zależna, przyjmująca wartość 1 dla tych respondentów, którzy odpowiedzieli „Tak” na zadane pytanie oraz 0, jeśli odpowiedzieli „Nie”.

Celem artykułu jest identyfikacja i kwantyfikacja wpływu wszystkich grup czynników, wskazywanych w literaturze tematu jako ważnych, na prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego. Cel ten zrealizowano przy użyciu kilku metod/procedur ekonometrycznych. W kroku pierwszym wyspecyfikowano i oszacowano parametry dychotomicznego modelu logitowego, obejmującego 26 regresorów. Uzyskano wyniki zgodne z ustaleniami merytorycznymi, jednakże znaczna część zmiennych objaśniających okazała się statystycznie nieistotna. Dlatego też

w kolejnym kroku zastosowano strategię modelowania od ogółu do szczegółu, w efekcie czego otrzymano wariant, w którym wszystkie regresory są statystycznie istotne. I wreszcie w celu zbadania odporności otrzymanych rezultatów, zastosowano klasyczną metodę uśredniania międzymodelowego.

Do obliczeń empirycznych wykorzystano dane mikroekonomiczne pochodzące, ze wspomnianego wcześniej, ogólnopolskiego, reprezentatywnego badania ankietowego beneficjentów i usługodawców, przeprowadzonego przez Instytut Spraw Publicznych w Warszawie w 2012 roku (Burdziej, Dudkiewicz, 2013; Peisert i inni, 2013). Rezultaty analizy pokazują, że jedynie nieliczne czynniki uznać należy za faktycznie zwiększające lub zmniejszające prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego. Są to: płeć, wiek, stan cywilny, aktywność społeczna i postawa wobec przestrzegania prawa.

Struktura pracy jest następująca. W kolejnym punkcie omówiono kwestie metodyczne. Sekcja 3-cia zawiera dyskusję nad specyfikacją dychotomicznego modelu logitowego w nawiązaniu do ustaleń teoretycznych i wyników wcześniejszych badań empirycznych. W punkcie 4-tym przytoczono rezultaty badania autorskiego i dokonano ich interpretacji. Artykuł zamykają uwagi końcowe.

2. METODYKA

2.1. Model logitowy

Gdy zmienna zależna jest zero-jedynkowa, wyjaśnianie zależności pomiędzy tą zmienną a innymi kategoriami ekonomiczno-społecznymi odbywa się po dokonaniu estymacji parametrów modelu dychotomicznego:

$$y_i^* = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \dots + \alpha_K x_{Ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \varepsilon_i \sim F, \quad (1.a)$$

$$y_i = I\{y_i^* > 0\}, \quad (1.b)$$

gdzie i indeksuje obserwacje, $I\{\cdot\}$ oznacza zmienną wskaźnikową, przyjmującą wartość 1, gdy warunek zdefiniowany w „klamrowym nawiasie” jest spełniony oraz 0 w przeciwnym przypadku, natomiast x_{1i}, \dots, x_{Ki} są zmiennymi objaśniającymi, ε_i jest nieobserwowalnym składnikiem losowym, natomiast F oznacza dystrybucję jego rozkładu. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K$ są parametrami podlegającymi estymacji. y_i oznacza obserwowalną zmienną dychotomiczną, natomiast y_i^* jest zmienną nieobserwowalną związaną ze zmienną dychotomiczną (por. np. Marzec, 2008; Gruszczyński, 2010). Najczęściej przyjmuje się, że składnik losowy pochodzi z rozkładu normalnego lub logistycznego. Wówczas mamy do czynienia odpowiednio z modelem probitowym lub logitowym. W przypadku niesymetrycznego rozkładu skład-

nika losowego, najczęściej przyjmuje się, że jest to komplementarny rozkład log-log. Z rozkładem tym związany jest model komplementarny log-log.

W badaniach ekonomicznych, kluczowym zagadnieniem jest interpretacja siły wpływu zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą. W modelu dwumianowym oszacowania parametrów nie mają takiej interpretacji jak w klasycznym modelu regresji liniowej. Niemniej jednak po dokonaniu estymacji parametrów modelu logitowego możliwa jest interpretacja funkcji oszacowań w kontekście wpływu jednostkowej zmiany wartości zmiennej objaśniającej na iloraz szans. Jeśli w wyniku estymacji parametrów modelu logitowego uzyskane zostanie oszacowanie parametru wynoszące $\hat{\alpha}_1$, należy je interpretować następująco:

- jednostkowy wzrost wartości zmiennej x_1 powoduje przy innych czynnikach niezmiennych zmianę ilorazu szans o $(\exp(\hat{\alpha}_1) - 1) \cdot 100\%$.

W badaniach opartych na modelach dychotomicznych, często pojawiają się zmienne binarne w charakterze regresorów. Załóżmy, że zmienna x_2 jest zmienną binarną. Jeśli oszacowanie parametru przy tej zmiennej wynosi $\hat{\alpha}_2$, należy je interpretować następująco:

- iloraz szans różni się o $(\exp(\hat{\alpha}_2) - 1) \cdot 100\%$ w przypadku gdy zmienna x_2 przyjmuje wartość 1 w porównaniu z sytuacją, gdy jej wartość wynosi 0.

W badaniach opartych na modelach dychotomicznych, mogą pojawić się także zmienne nominalne o więcej niż 2 kategoriach (np. rozmiar firmy – mikro, mała, średnia, duża). Wówczas jednym ze sposobów rozwiązania problemu jest stworzenie zmiennych zero-jedynkowych dla wszystkich wariantów oprócz wariantu bazowego (por. Świadek, Wojciech, 2015). Niech zmienna x_{3l} oznacza zmienną zero-jedynkową przyjmującą wartość 1, gdy zmienna nominalna x_3 przyjmuje wartość l ($l=2, 3, \dots, L$), natomiast wariant, w którym przyjmuje ona wartość 1 jest wariantem bazowym. Wówczas oszacowanie parametru przy zmiennej x_{3l} można interpretować następująco:

- iloraz szans różni się o $(\exp(\hat{\alpha}_{3l}) - 1) \cdot 100\%$ w przypadku gdy zmienna x_3 przyjmuje wartość l w porównaniu z sytuacją, gdy jej wartość wynosi 1.

Dla modeli dwumianowych jakość dopasowania można mierzyć poprzez porównanie teoretycznych wartości zmiennej zależnej z wartościami empirycznymi. Funkcja wykorzystywana do obliczania teoretycznych wartości zmiennej zależnej przyjmuje następującą postać:

$$\hat{y}_i = I\{\hat{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) > c\}, \quad (2)$$

gdzie \hat{P} oznacza oszacowanie prawdopodobieństwa, że zmienna zależna przyjmuje wartość 1. \hat{y}_i jest wyznaczoną ze wzoru (2) prognozą wewnątrzpróbkową zmiennej y_i . Po wyznaczeniu wewnątrzpróbkowych prognoz dla zmiennej y_i , definiowana jest tabela trafności predykcji (patrz tabela 1).

Tabela 1. TRAFNOŚĆ PREDYKCJI

Empiryczne Teoretyczne	$y = 0$	$y = 1$
$\hat{y} = 0$	N_{00}	N_{01}
$\hat{y} = 1$	N_{10}	N_{11}

Źródło: opracowanie własne.

N_{00} jest liczbą obserwacji, dla których zarówno obserwowana jak i prognozowana wartość zmiennej zależnej wynosi 0. N_{01} jest liczbą obserwacji, dla których zmienna zależna przyjmuje wartość 1, jednak jej wewnątrzpróbkowa prognoza wynosi 0, zaś N_{10} jest liczbą takich obserwacji, dla których prognozowana wartość wynosi 1 a rzeczywista 0. Liczba obserwacji, dla których zarówno empiryczna jak i prognozowana wartość zmiennej zależnej jest równa 1 wynosi N_{11} . Oznacza to zatem, że procent poprawnych predykcji obliczany jest za pomocą następującej formuły:

$$CP = \frac{N_{00} + N_{11}}{N_{00} + N_{11} + N_{01} + N_{10}} \tag{3}$$

Podczas generowania tabeli trafności predykcji, ważnym zagadnieniem jest wybór parametru c . W przypadku, gdy udział „jedynek” w próbie nie jest zbyt odległy od 0,5, to wówczas przyjmuje się, że $c = 0,5$. Jeśli jednak próba ma charakter niezbilansowany (udział „zer” lub „jedynek” jest bliski 100%) to wówczas punkt progowy c powinien być równy udziałowi „jedynek” w próbie. Oprócz wartości zmiennej CP na podstawie wartości z tabeli 1 obliczane są także następujące wielkości:

- czułość (ang. *sensitivity*):

$$SENSITIVITY = \frac{\sum_{i=1}^N I\{\hat{y}_i = 1 | \mathbf{x}_i\} \cdot I\{y_i = 1\}}{\sum_{i=1}^N I\{y_i = 1\}}, \tag{4}$$

- specyficzność:

$$SPECIFICITY = \frac{\sum_{i=1}^N I\{\hat{y}_i = 0 | \mathbf{x}_i\} \cdot I\{y_i = 0\}}{\sum_{i=1}^N I\{y_i = 0\}}, \tag{5}$$

- udział empirycznych „jedynek”, jeśli prognozowana jest wartość 1:

$$PPV = \frac{\sum_{i=1}^N I\{\hat{y}_i = 1 | \mathbf{x}_i\} \cdot I\{y_i = 1\}}{\sum_{i=1}^N I\{\hat{y}_i = 1 | \mathbf{x}_i\}}, \tag{6}$$

– udział empirycznych „zer”, jeśli prognozowana wartość wynosi 0:

$$NPV = \frac{\sum_{i=1}^N I\{\hat{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) \leq c\} \cdot I\{y_i = 0\}}{\sum_{i=1}^N I\{\hat{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) \leq c\}}, \quad (7)$$

Analizowane powyżej mierniki zależą od poziomu c . Nietrudno zauważyć, że wraz ze wzrostem parametru c , wzrasta wartość miernika (5) i obniża się wartość miernika (4). Udział „jedynek” w próbie jest tzw. optymalną wartością graniczną Cramera (por. Gruszczynski, 2010). Możliwe jest ustalenie c na poziomie minimalizującym prawdopodobieństwo popełnienia błędu predykcji. A zatem optymalna wartość parametru wyznaczana jest na podstawie wzoru:

$$C_{OTP} = \arg \min_c \left(\frac{\sum_{i=1}^N I\{\hat{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) > c\} \cdot I\{y_i = 0\}}{\sum_{i=1}^N I\{y_i = 0\}} + \frac{\sum_{i=1}^N I\{\hat{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) \leq c\} \cdot I\{y_i = 1\}}{\sum_{i=1}^N I\{y_i = 1\}} \right). \quad (8)$$

Krzywa ROC (ang. *Receiver Operating Characteristic*) wykorzystywana jest w celu analizy zależności pomiędzy czułością a specyficznością dla różnych wartości współczynnika c . Ilustruje ona wszystkie kombinacje obu rodzajów błędów dla różnych wartości progowych. Pokazuje zależność między *SENSITIVITY* oraz *1-SPECIFICITY*. Pole pod krzywą ROC wykorzystywane jest także do oceny jakości dopasowania modelu do danych. Przyjmuje ono wartości z przedziału $(0,5; 1)$. Jeśli powierzchnia pod krzywą ROC jest minimalna, to wówczas model nie ma żadnej mocy predykcyjnej. Drugi krańcowy przypadek (pole=1) oznacza, że model idealnie prognozuje wartości empiryczne. Koncepcja krzywej ROC wykorzystywana była m.in. w analizie ubóstwa miejskich i wiejskich gospodarstw domowych (por. Sączewska-Piotrowska, 2016).

Porównanie średniego prawdopodobieństwa, że zmienna zależna przyjmuje wartość 1 czyli wielkości $\frac{\sum_{i=1}^N \hat{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i)}{N}$ z udziałem „jedynek” w próbie czyli wielkością \bar{y} nie dostarcza odpowiednich informacji na temat jakości dopasowania modelu do danych. W przypadku modelu logitowego zawierającego wyraz wolny, te dwie wielkości są sobie równe (por. m.in. Lechner, 1991). Dlatego też w celu analizy jakości dopasowania modelu do danych często wykorzystywany jest test specyfikacji zaproponowany przez Hosmera i Lemeshowa (1980). Ocenia on jakość dopasowania poprzez porównanie udziału „jedynek” w próbie z prawdopodobieństwem, że zmienna zależna przyjmuje wartość 1 w podgrupach.

Ponieważ zgodność pomiędzy teoretycznym a empirycznym rozkładem składnika losowego jest warunkiem koniecznym zgodności estymatora największej wiarygodności, po dokonaniu estymacji parametrów modelu logitowego lub probitowego, uzasadnione jest testowanie symetryczności rozkładu składnika

losowego. W tym celu Stukel (1988) zaproponował testowanie symetryczności rozkładu składnika losowego za pomocą testu mnożnika Lagrange'a. Sposób przeprowadzenia tego testu jest następujący:

- 1) Dokonuje się estymacji parametrów modelu logitowego/probitowego.
- 2) Następnie wyznaczane są wartości teoretyczne dla zmiennej nieobserwowalnej oraz ich kwadraty: $(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{ML})^2$.
- 3) Następnie dokonuje się estymacji parametrów następującego modelu logitowego/probitowego:

$$y_i^* = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \lambda (\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{ML})^2 + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim F, \quad (9.a)$$

$$y_i = I\{y_i^* > 0\}. \quad (9.b)$$

- 4) Za pomocą testu Walda, weryfikowana jest następująca hipoteza:

$$H_0: \lambda = 0, \quad (10.a)$$

$$H_1: \lambda \neq 0. \quad (10.b)$$

W celu weryfikacji hipotezy (10) wykorzystywana jest następująca statystyka testu Walda:

$$WALD = \frac{(\hat{\lambda}^{ML})^2}{\hat{\sigma}_{\lambda}^2}, \quad (11)$$

gdzie $\hat{\sigma}_{\lambda}^2$ jest oszacowaniem wariancji estymatora parametru λ z modelu (9.a)–(9.b).

Uzyskana wartość statystyki (11) porównywana jest z wartością krytyczną dla rozkładu chi-kwadrat z jednym stopniem swobody. Obszar odrzuceń ma charakter jednostronny. Hipoteza zerowa wskazuje na symetryczność rozkładu składnika losowego.

Podczas testowania za pomocą testu Stukela (1988) należy uwzględnić fakt, że omówiona powyżej procedura jest nieformalna, gdyż nie testuje *par excellence* względem siebie modelu z asymetrią i bez asymetrii. Formalne testowanie symetryczności przy wykorzystaniu technik Bayesowskich zostało zaproponowane przez m.in. Osiewalskiego, Marca (2004). Wykorzystując techniki klasyczne, formalne testowanie symetryczności może zostać wykonane za pomocą statystyki zaproponowanej przez Lechnera (1991). Polega ono na wykorzystaniu faktu, że rozkład logistyczny jest szczególnym przypadkiem rozkładu Burra 2-ego typu z parametrem J . Jeśli w modelu (1.a)–(1.b) składnik losowy ε_t pochodzi z rozkładu Burra drugiego typu z parametrem J , to wówczas dystrybuenta jego rozkładu przyjmuje postać:

$$F(\varepsilon_t) = \frac{1}{(1 + \exp(-\varepsilon_t))^{-J}}, \quad J \geq 0. \quad (12)$$

Model dwumianowy ze składnikiem losowym pochodzącym z rozkładu Burra drugiego typu sprowadza się do modelu logitowego, jeśli $J = 1$. Jeśli $J < 1$ mamy do czynienia z asymetrią lewostronną natomiast w przypadku gdy $J > 1$ pojawia się problem asymetrii prawostronnej. Dlatego też testowanie symetryczności polega na testowaniu prawdziwości restrykcyj $J = 1$. Lechner (1991) oraz Thomas (1993) proponują oszacowanie parametrów modelu ze składnikiem losowym pochodzącym z rozkładu Burra drugiego typu oraz/lub składnikiem losowym pochodzącym z rozkładu logistycznego metodą największej wiarygodności a następnie wykorzystanie jednej z trzech klasycznych statystyk (mnożnika Lagrange'a, ilorazu wiarygodności, Walda). Niech $\hat{\alpha}^{LOGIT}$ oraz $\hat{\alpha}^{BURR}$ będą estymatorami największej wiarygodności parametrów odpowiednio przy założeniu, że składnik losowy pochodzi z rozkładu logistycznego oraz rozkładu Burra drugiego typu natomiast \hat{j}^{BURR} jest estymatorem największej wiarygodności parametru J przy założeniu, że składnik losowy pochodzi z rozkładu Burra drugiego typu. Wówczas statystyka testu ilorazu wiarygodności przyjmuje postać:

$$LR = -2 \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^N I\{y_i = 1\} \log \left(1 - \left(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\alpha}^{LOGIT}) \right)^{-1} \right) + \\ \sum_{i=1}^N I\{y_i = 0\} \log \left(\left(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\alpha}^{LOGIT}) \right)^{-1} \right) + \\ - \sum_{i=1}^N I\{y_i = 1\} \log \left(1 - \left(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\alpha}^{BURR}) \right)^{-j^{BURR}} \right) - \\ - \sum_{i=1}^N I\{y_i = 0\} \log \left(\left(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\alpha}^{BURR}) \right)^{-j^{BURR}} \right) \end{array} \right]. \quad (13)$$

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, statystyka (13) ma rozkład chi-kwadrat z jednym stopniem swobody. Jeśli odrzucona zostanie hipoteza o symetryczności rozkładu należy bazować na oszacowaniach parametrów modelu z rozkładem Burra drugiego typu dla składnika losowego lub oszacować parametry komplementarnego modelu log-log. W przypadku braku symetryczności rozkładu składnika losowego, można też oszacować parametry modelu dychotomicznego ze skośnym rozkładem t-Studenta (por. Osiewalski, Marzec, 2004).

W modelu dwumianowym zakłada się, że dla wszystkich obserwacji rozkład składnika losowego jest taki sam. W związku z tym przyjmuje się założenie o stałości wariancji. Alternatywnym modelem, w którym przyjmuje się założenie o heteroskedastyczności składnika losowego jest heteroskedastyczny model probitowy:

$$P(y_i = 1 | \mathbf{x}_i) = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}}{\sigma_i}\right), \quad (14)$$

gdzie: $\sigma_i^2 = \exp(\mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\delta})$, \mathbf{z}_i jest wektorem zmiennych egzogenicznych niezawierającym stałej.

W celu sprawdzenia, czy mamy do czynienia z heteroskedastycznością składnika losowego, weryfikowana jest następująca hipoteza:

$$H_0: \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}, \quad (15.a)$$

$$H_1: \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}. \quad (15.b)$$

Prawdziwość hipotezy (15) weryfikowana jest za pomocą statystyki testu Walda.

2.2. Klasyczne uśrednianie w modelu dwumianowym

Jeśli zbiór potencjalnych zmiennych objaśniających jest duży, trudno jest zdecydować się na optymalny wariant modelu. Zastosowanie klasycznej strategii „od ogółu do szczegółu” może doprowadzić do takiej sytuacji, że istotna i ważna zmienna zostanie pominięta ze względu na wysoki graniczny poziom istotności przy tej zmiennej wynikający z wysokiej wartości współczynnika korelacji pomiędzy tą zmienną a innym regresorem. Oprócz tego zastosowanie uśredniania klasycznego (lub alternatywnej strategii czyli uśredniania bayesowskiego) umożliwia porównanie poszczególnych regresorów pod kątem ich wkładu do wartości informacyjnej modeli zawierających te zmienne. Jeśli liczba potencjalnych zmiennych objaśniających wynosi M , to wówczas liczba możliwych podzbiorów wynosi $P = 2^M$, włączając w to zbiór pusty. Niech $p = 1, 2, \dots, P$ numeruje modele zawierające różne warianty zestawu zmiennych objaśniających. Dla każdego modelu obliczana jest wartość kryterium informacyjnego Akaike'a (AIC) (por. Akaike, 1974):

$$AIC_p = -2 \ln L_{U,p} + 2K_p, \quad (16)$$

gdzie K_p jest liczbą parametrów do estymacji w p -tym modelu. Spośród wielu modeli, preferowane są warianty o najmniejszych wartościach kryterium (16).

Możliwa jest jednak estymacja parametrów modelu dwumianowego zgodnie z zaproponowaną przez Burnhama, Anderssona (2002, 2004) metodą uśredniania modeli. Niech $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_p$ będzie $M+1$ -wymiarowym wektorem oszacowań parametrów modelu dwumianowego w przypadku, gdy wybierany jest p -ty model. Oznacza to zatem, że jeśli m -ta zmienna nie występuje w p -tym wariancie, to wówczas odpo-

wiedni element wektora $\hat{\alpha}_p$ wynosi 0. Ponieważ najlepszy model posiada najniższą wartość kryterium informacyjnego Akaike, dla każdego z P modeli obliczana jest tzw. odległość od wzorca czyli różnica pomiędzy wartością kryterium informacyjnego dla tego modelu oraz minimalną wartością kryterium:

$$\Delta_p = AIC_p - AIC_{\min}. \quad (17)$$

Następnie obliczane są tzw. wagi Akaike dla każdego modelu w następujący sposób:

$$w_p = \frac{\exp\left(-\frac{\Delta_p}{2}\right)}{\sum_{s=1}^P \exp\left(-\frac{\Delta_s}{2}\right)}. \quad (18)$$

Jak pokazali Burnham, Andersson (2002, 2004), wielkości typu $\frac{w_p}{w_r}$ są równoważne ilorazom funkcji wiarygodności dla modeli p oraz r . Dlatego też wielkość (18) należy interpretować jako prawdopodobieństwo, że model p jest właściwy. A zatem estymator największej wiarygodności po zastosowaniu klasycznego warunkowego⁵ uśredniania międzymodelowego dla m -tego elementu wektora α_p jest następujący:

$$\hat{\alpha}_{UM,m} = \frac{\sum_{p=1}^P w_p \hat{\alpha}_{p,m}}{\sum_{p=1}^P w_p J_m^p}, \quad (19)$$

gdzie $\hat{\alpha}_{p,m}$ jest oszacowaniem parametru przy m -tej zmiennej, jeśli p -ty model został wybrany, natomiast $J_{p,m}$ jest indykatorem określającym czy m -ta zmienna występuje jako objaśniająca w p -tym wariancie.

Wnioskowanie o istotności wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających na zmienną binarną wymaga obliczenia oszacowań wariancji estymatorów parametrów. Oszacowanie wariancji dla m -tego elementu wektora α_p obliczane jest następująco:

$$\text{var}(\hat{\alpha}_{UM,m}) = \left[\sum_{p=1}^P J_m^p \left[\text{var}(\hat{\alpha}_{p,m} | g_p) + (\hat{\alpha}_{p,m} - \hat{\alpha}_{UM,m}) \right]^{1/2} \right]^2, \quad (20)$$

gdzie $(\hat{\alpha}_{p,m} | g_p)$ jest oszacowaniem wariancji estymatora parametru przy m -tej zmiennej w przypadku gdy wybierany jest p -ty model.

⁵ Uśrednianie warunkowe polega na tym, że przy wyliczaniu oszacowania uwzględniane są tylko te warianty, w których dana zmienna występuje. W przypadku uśredniania Bayesowskiego uwzględniane są wszystkie warianty, czyli także takie, w których wartość parametru wynosi 0.

W przypadku klasycznego uśredniania międzymodelowego, oprócz wnioskowania o istotności zmiennych na podstawie oszacowań parametrów i średnich błędów szacunku, możliwe jest wnioskowanie o ważności zmiennej objaśniającej w kształtowaniu się danej zmiennej binarnej. W tym celu dla każdej zmiennej obliczana jest jej ważność, którą oblicza się następująco:

$$waz_m = \sum_{p=1}^P J_m^p w_p. \quad (21)$$

Miernik (21) przyjmuje zatem wartości z przedziału $<0,1>$. Im wyższa jest wartość tego miernika dla danej zmiennej tym większa jest jej moc w wyjaśnieniu kształtowania się zmiennej zależnej. Wynika to z faktu, że wagi dla modeli niezawierających tej zmiennej muszą być niskie, natomiast wagi dla modeli uwzględniających daną zmienną są wysokie.

3. SPECYFIKACJA DYCHOTOMICZNEGO MODELU LOGITOWEGO OBJAŚNIAJĄCEGO PRAWDOPODOBIENSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO

Wykorzystywana w badaniu empirycznym zmienna zależna przyjmuje wartość 1 dla tych respondentów, którzy mieli problem prawny w okresie 5 lat poprzedzających badanie. Respondenci Ci byli pytani, czy w analizowanym okresie znaleźli się w sytuacji wymagającej pomocy prawnika, osoby z wykształceniem prawniczym lub instytucji/organizacji udzielającej porad prawnych. Prezentowane wyniki badania empirycznego oparte są na reprezentatywnej próbie 572 respondentów. Tabela 2 przedstawia rozkład częstości dla dychotomicznej zmiennej zależnej. Ponad 70% respondentów nie spotkało się z problemem prawnym w okresie ostatnich 5 lat, natomiast mniej niż 30% respondentów odpowiedziało twierdząco na zadane w ankiecie pytanie.

Tabela 2. ROZKŁAD CZĘSTOŚCI DLA ZMIENNEJ DYCHOTOMICZNEJ

Wartość	Częstość
0	0,717
1	0,283

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem danych z ogólnopolskiego badania ankietowego ISP.

Przegląd literatury teoretycznej i empirycznej (np. Murayama, 2007; Kritzer, 2008; Pleasence i inni, 2011; Winczorek, 2015) wskazuje na następujące grupy czynników ryzyka wystąpienia problemu prawnego:

- indywidualne cechy społeczno-ekonomiczne i demograficzne,
- indywidualne postawy wobec przestrzegania i stosowania prawa,
- indywidualną aktywność społeczną,
- środowisko społeczno-ekonomiczne i bariery dostępu do poradnictwa prawnego.

Tabela 3. LISTA CZYNNIKÓW, KTÓRE MOGA WPLÝWAĆ NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO

Czynniki	Symbol zmiennej/ jednostka miary	Uzasadnienie teoretyczne i empiryczne z obszaru nauk społecznych (socjologicznych, prawnych, ekonomicznych)	Oczekiwany znak efektu krańcowego, kategoria referencyjna, uwagi
Cechy społeczno-demograficzne			
Płeć	FEM (0-1)	Kobiety częściej doświadczają problemów prawnych, co wiązać się może z ich gorszą pozycją społeczno-ekonomiczną w większości społeczeństw (Moorhead i inni, 2004).	(+) Kategoria referencyjna: mężczyźni.
Wiek	AGE	Występowanie problemów prawnych jest zależne od wieku respondentów, przy czym zależność ta nie ma charakteru liniowego. Wynika to szeroko rozumianego cyklu życia jednostki (Pleasence i inni, 2004; Currie, 2006; Coumarelos i inni, 2006; Curran, 2007).	(+)
Wiek do kwadratu	AGE2		(-)
Wykształcenie ponadpodstawowe: podstawowe nieukończone	EDUP(0-1)	<i>Ceteris paribus</i> lepsze wykształcenie powinno skutkować obszerniejszą wiedzą ogólną i tym samym bardziej aktywną postawą wobec zaistniałego problemu prawnego (Legal Service Corporation, 1994; Murayama, 2007; Feisert i inni, 2013).	(+) Kategoria referencyjna: wykształcenie podstawowe lub niższe. Należy oczekiwać dodatnich oszacowań parametrów.
Wykształcenie ponadśrednie	EDUS (0-1)		
Stan cywilny (kawaler/panna)	SCKA (0-1)	Stan cywilny w dużym stopniu wpływa na inne cechy osobnicze, które mogą oddziaływać na percepcję rzeczywistości i warunkują przyjmowanie określonych postaw i zachowań, które w konsekwencji mogą sprzyjać lub oddalać prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego (Legal Service Corporation, 1994).	(?) Kategoria referencyjna: „inne”. Trudno <i>a priori</i> przesądzać o kierunku, względem pozostałych parametrów określających stan cywilny.
Stan cywilny (żonaty/mężatka)	SCZO (0-1)		
Stan cywilny (rozwódnik/rozwódka)	SCRO (0-1)		
Stan cywilny (wdowiec/wdówka)	SCWD (0-1)		
Cechy ekonomiczno-społeczne			
Logarytm dochodu osobę w gospodarstwie	lnDOCH (zł)	Wyższy dochód zmniejsza bariery dostępu do usług prawnych, zwłaszcza komercyjnych. Osoby z relatywnie niskim i relatywnie wysokim dochodem częściej doświadczają problemów prawnych, chociaż z innych przyczyn (Legal Service Corporation, 1994).	(-)
Logarytm dochodu na osobę w gospodarstwie do kwadratu	lnDOCH2		(+)
Miejsce zamieszkania: miasto powyżej 20 tys. mieszkańców	RESCITY (0-1)	Relacje społeczne, warunki materialno-bytowe, dostępność do usług prawnych itd. są bardzo zróżnicowane względem miejsca zamieszkania. Sprawdza to, że indywidualna podatność na problemy prawne może silnie zależeć od miejsca zamieszkania (Pleasence i inni, 2004).	(?) Zmienna referencyjna: wieś lub miasto poniżej 20 tys. mieszkańców.

Tabela 3. LISTA CZYNNIKÓW, KTÓRE MOGĄ WPLYWAĆ NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO (cd.)

Czynniki	Symbol zmiennej/ jednostka miary	Uzasadnienie teoretyczne i empiryczne z obszaru nauk społecznych (socjologicznych, prawnych, ekonomicznych)	Oczekiwany znak efektu krańcowego, kategoria referencyjna, uwagi
Cechy ekonomiczno-społeczne (cd.)			
Sytuacja zawodowa: osoba pracująca	WORKA (0-1)	Sytuacja zawodowa wpływa na wysokość zarobków, relacje w miejscu pracy, więzi społeczne, samoocенę, itp. Nieintencjonalny brak pracy lub jej niedomiar prowadzi może do negatywnych konsekwencji psychologicznych, ekonomicznych i społecznych, co zmniejsza podmiotowość osób mało- lub nieaktywnych zawodowo, a w konsekwencji może oddziaływać na podatność na problemy prawne (Pleasence i inni, 2004; Murayama, 2007; Peisert i inni, 2013).	Zmienna referencyjna: (?) osoba niepracująca. Należy spodziewać się regularnej reakcji większościowej, mniejszościowej lub parabolicznej pomiędzy poszczególnymi parametrami stojącymi przy zmiennych określających sytuację zawodową respondenta.
Sytuacja zawodowa (2): osoba pracująca w jednym lub więcej miejscach pracy	WORKB (0-1)		Zmienna referencyjna: (?) Nie pracuję zawodowo lub Nie mam stałej pracy, pracuję dorywczo w różnych miejscach. Należy spodziewać się regularnej reakcji większościowej lub mniejszościowej pomiędzy poszczególnymi parametrami stojącymi przy zmiennych określających sytuację zawodową respondenta.
Subiektywnie postrzegany dobrobyt	SUB/ (0-1)	Subiektywnie postrzegany poziom zamożności może być istotnym czynnikiem wpływającym na percepcję rzeczywistości, w tym możliwości adekwatnej identyfikacji wystąpienia problemu prawnego oraz możliwości jego rozwiązania (Legal Service Corporation, 1994; Moorhead i inni, 2004; Coumarelos i inni, 2006).	Zmienna referencyjna: (?) pozostate odpowiedzi Wartość „1” — udzielenie odpowiedzi Żyjemy dobrze/barczo dobrze na następujące pytanie: Które z wymienionych określeń najlepiej charakteryzuje sytuację P. gospodarstwa domowego.

Tabela 3. LISTA CZYNNIKÓW, KTÓRE MOGĄ WPŁYWAĆ NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO (cd.)

Czynniki	Symbol zmiennej/ jednostka miary	Uzasadnienie teoretyczne i empiryczne z obszaru nauk społecznych (socjologicznych, prawnych, ekonomicznych)	Oczekiwany znak efektu krańcowego, kategoria referencyjna, uwagi
Cechy ekonomiczno-społeczne (dok.)			
Stan zdrowia własnego lub członka rodziny	HTH (0-1)	<p>Afirmatywy wybór przynajmniej jednej z opcji odpowiedzi na następujące pytanie: <i>Czy w ciągu ostatnich dwunastu miesięcy:</i></p> <p>a) <i>cierpiał/a P. z powodu długotrwałej choroby,</i> b) <i>cierpiał/a P. z powodu niepełnosprawności,</i> c) <i>był/a P. pacjentem/ką szpitala,</i> d) <i>był/a P. przez miesiąc lub dłużej niezdolny/a do wykonywania swojej pracy zawodowej lub codziennych obowiązków w związku z chorobą lub obrażeniami ciała?</i> (Curran, 2007; Coumarelos i inni, 2006).</p>	<p>(+)</p> <p>Zmienna referencyjna: odpowiedź <i>Nie</i>.</p>
Świadomość prawna i postawa wobec przestrzegania i stosowania prawa			
Świadomość prawna	PAWR liczba całkowita z przedziału 0-15	<p>Wraz ze wzrostem świadomości prawnej oczekiwać należy adekwatnej oceny zaistniałej sytuacji i pełniejszego uswiadomienia niekorzystnych następstw pozostawienia problemu nierozwiązanym (Pleasence i inni, 2003; Barendrecht; de Langen, 2008; Pleasence i inni, 2011; Winczorek, 2015).</p>	<p>(+)</p> <p>Zerowa znajomość prawa: PAWR = 0; doskonała znajomość prawa: PAWR = 15 (komentarz w tekście zasadniczym).</p>
Postawa wobec przestrzegania prawa: <i>powinno się zawsze przestrzegać prawa nawet jeśli jest ono niesłuszne</i>	PCPL (0-1)	<p>Postawa wobec przestrzegania prawa rzutuje na sposób rozwiązywania problemów prawnych (Kritzer i inni, 1991; Kurczewski, Fuszara, 2004; Pleasence i inni, 2004).</p>	<p>(-)</p> <p>Kategoria referencyjna: <i>Do przepisów prawa, które uważam za niesłuszne nie należy się wcale stosować lub Jeśli napotyka się przepisy prawa naszym zdaniem niesłuszne, należy się do nich stosować tylko na pozór.</i> Komentarz w tekście zasadniczym.</p>
Postawa wobec stosowania prawa	PUSE (liczba całkowita z przedziału 0-3)	<p>Postawa wobec stosowania prawa jest ważką i trwałą cechą osobniczą rzutującą na sposób rozwiązywania problemów prawnych (Kurczewski, Fuszara, 2004).</p>	<p>(+)</p> <p>Postawa ugodowa: PUSE=0; postawa „skargliwa”: PUSE=3 (komentarz w tekście zasadniczym).</p>

Tabela 3. LISTA CZYNNIKÓW, KTÓRE MOGĄ WPŁYWAĆ NA PRAWDOPODOBIENIŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO (dok.)

Czynniki	Symbol zmiennej/ jednostka miary	Uzasadnienie teoretyczne i empiryczne z obszaru nauk społecznych (socjologicznych, prawnych, ekonomicznych)	Oczekiwany znak efektu krańcowego, kategoria referencyjna, uwagi
Postawa społeczna, kapitał społeczny, aktywność społeczna i intelektualna			
Kapitał społeczny/zaufaanie do obcych osób	SCAP (0-1)	Afirmatywna odpowiedź na pytanie, cyt. <i>Ogólnie rzecz biorąc, czy uważa P., że można ufać większości ludzi, czy też sądzi P., że w postępowaniu z ludźmi ostrożności nigdy za wiele.</i>	(?) Kategoria referencyjna: odpowiedź <i>Nie</i> .
Przynależność do organizacji społecznych	APAR (0-1)	Aktywność społeczna świadczy o operatywności, inicjatywności upodmiotowieniu i uspołecznieniu osób aktywnych, co powinno skutkować innymi sposobami reakcji na zaistnienie problemu prawnego niż osób mniej społecznie aktywnych (por. Murayama, 2007; Peisert i inni, 2013).	Nie należący do żadnej organizacji: APAR=0; Członek przynajmniej jednej organizacji: APAR=1.
Działalność społeczna	AACT (0-1)		(?) Nie: AACT=0 Tak: AACT=1
Aktywność intelektualna	INTA (0-1)	Następująca odpowiedź na pytanie, cyt. <i>Czy i jak w ciągu tygodnia czyta P. prasę codzienną lub czasopisma, albo poszukuje informacji w internecie czyta prasę codzienną lub czasopisma: „Tak, więcej niż trzy godziny w tygodniu”</i> (Peisert i inni 2013).	(?)
Dostęp do Internetu	INTB (0-1)	Afirmatywna odpowiedź na pytanie, cyt. <i>Czy ma P. dostęp do internetu w domu?</i> (Peisert i inni, 2013).	(?)
Korzystanie z Internetu	INTC (0-1)	Następująca odpowiedź na pytanie, cyt. <i>Jak często zagląda P. do serwisów i portali internetowych: „Raz w tygodniu lub częściej”</i> (Peisert i inni, 2013).	(?)

Źródło: opracowanie własne.

Pytania kwestionariuszowe, zawarte we wspomnianej we wprowadzeniu ogólnopolskiej ankiecie Instytutu Spraw Publicznych w Warszawie, objęły wszystkie wyżej wymienione uwarunkowania, co dało możliwość konstrukcji modelu logitowego objaśniającego prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego. W tabeli 3 przedstawiono listę potencjalnie istotnych czynników oddziałujących na to prawdopodobieństwo, które uwzględniono w ankiecie ISP, i które zakwalifikowano do jednej z wymienionych w poprzedzającym akapicie grup tematycznych.

Na podstawie przesłanek logicznych i dotychczasowych ustaleń teoretycznych, każdemu regresorowi przypisano oczekiwany znak parametru („+” lub „-”). Dla większości zmiennych w tabeli 3 znaki te są z góry ustalone, ale w przypadku niektórych regresorów nie było to możliwe. Taką sytuację oznaczono symbolem (?). Należy przy tym zaznaczyć, że zarówno znaki parametrów, jak i ich interpretacja jest warunkowa zarówno względem sposobu kodowania danej zmiennej objaśniającej⁶, jak i kategorii referencyjnej w dychotomicznym modelu logitowym⁷.

Wystąpienie problemu prawnego – tak jak inne wymiary życia – w dużym stopniu zależy od cech osobniczych respondenta i jego otoczenia społecznego. Dlatego we wszystkich badaniach empirycznych cytowanych w niniejszym artykule spotkać można zmienne objaśniające, które uwzględniają takie uwarunkowania. Tabela 3 zawiera listę zmiennych omawianego typu, która obejmuje czynniki społeczno-ekonomiczno-demograficzne oraz środowiskowe (miejsce zamieszkania). Większość z tych zmiennych przedstawiona jest w postaci zmiennych 0–1, co – po podaniu w odpowiednich kolumnach tabeli 3 informacji o kategorii referencyjnej (opcja, dla której dana zmienna przyjmuje wartość „0”) – umożliwia zrozumienie ich konstrukcji oraz oczekiwanego znaku parametru (tam gdzie takie ustalenia w odniesieniu do kierunku zależności pomiędzy regresorem a regresantem były *a priori* możliwe). Każdej zmiennej towarzyszy przy tym zwięzła wzmianka uzasadniająca jej obecność w modelu⁸.

Pewne zmienne z omawianych grup regresorów mają charakter polichotomiczny (stan cywilny, wykształcenie), w którym to przypadku uwagi sformułowane w poprzedzającym akapicie pozostają w mocy po uprzednim usta-

⁶ Np. w przypadku zmiennej dychotomicznej, takiej jak „płeć”, wartość „0” przypisano do mężczyzn, zaś wartość „1” do kobiet, dlatego oczekiwany znak parametru stojącego przy tej zmiennej jest dodatni (kobiety częściej doświadczają problemów prawnych). Oczywiście jednoczesna zmiana sposobu kodowania („0” – kobiety, „1” – mężczyźni) skutkowałaby apriorycznym wskazaniem ujemnej *ceteris paribus* zależności pomiędzy taką zmienną a regresantem.

⁷ Zmienną referencyjną w modelu jest brak problemu prawnego.

⁸ Założyć można przy tym, że ze względu na renomę instytucji odpowiedzialnej za opracowanie i przeprowadzenie badań ankietowych (ISP w Warszawie) wszystkie pytania zawarte w ankiecie służą określonej celowi analitycznemu, zwłaszcza iż w dużym stopniu treści kwestionariusza czerpią z wcześniej ustalonych wzorców (np. Murayama, 2007; Gramatikov, 2008).

leniu kategorii referencyjnej. Z kolei kilka zmiennych objaśniających przyjmuje wartości z przedziałów całkowitoliczbowych (świadomość prawna, postawa wobec stosowania prawa), zaś jedna zmienna objaśniająca – dochód na osobę w gospodarstwie – wyrażona jest w jednostkach pieniężnych (w zł na osobę).

Odrębnego komentarza wymaga grupa czynników aproksymujących świadomość prawną i postawę wobec prawa. Do konstrukcji zmiennej mierzącej stopień świadomości/wiedzy prawnej danego respondenta, PAWR, wykorzystano sumę poprawnych odpowiedzi na wieloczkłonowe pytanie dotyczące zakresu znajomości prawa przez respondenta. Wartość tej zmiennej waha się w przedziale od 0 do 15. Oczekiwać należy przy tym, że wraz ze wzrostem znajomości prawa dana osoba będzie w stanie częściej zidentyfikować pojawiający się problem życiowy jako problem prawny. Zestaw pytań, na które respondenci udzielali odpowiedzi „zgadzam się” lub „nie zgadzam się” był następujący (na końcu pytania przytoczono poprawną na nie odpowiedź⁹):

- a) *Każdy ma prawo kopiować i robić odpisy z akt w postępowaniu wszczętym przez urząd przeciwko niemu (P),*
- b) *Każdy ma prawo przeczytać protokoły, uchwały z posiedzeń rady swojej gminy (P),*
- c) *Każdy ma prawo zwołać zgromadzenie publiczne bez pisemnego zezwolenia urzędu gminy (F),*
- d) *W postępowaniach przed sądem każdy ma prawo do uzyskania pomocy adwokata z urzędu, opłacanego z pieniędzy publicznych (F),*
- e) *Każdy może wejść na posiedzenia rady swojej gminy (P),*
- f) *Każdy ubezpieczony w NFZ może zmienić swojego lekarza rodzinnego (P),*
- g) *Bez względu na wiek dziecka lekarz ma prawo poinformować rodziców o stanie zdrowia ich dziecka, nawet jeśli dziecko sobie tego nie życzy (F),*
- h) *Osoba bezdomna ma prawo do bezpłatnych świadczeń zdrowotnych (F),*
- i) *Przewóz karetką do Zakładu Opieki Zdrowotnej i z powrotem osoby starszej lub niepełnosprawnej jest bezpłatny (F),*
- j) *Uczniowie liceum mają prawo wypowiadać się na temat programu swoich lekcji (P),*
- k) *Urząd Gminy musi konsultować z mieszkańcami lokalizację spalarni śmieci (P),*
- l) *Urząd Gminy może zamknąć szkołę podstawową, nawet jeśli nie zgadzają się na to rodzice dzieci, które do niej uczęszczają (P),*
- m) *Sąd Najwyższy może w Polsce wydawać ustawy (F),*
- n) *Prawo zabrania świadkowi składania niezgodnych z prawdą zeznań (P),*
- o) *Najważniejszym źródłem prawa w Polsce są rozporządzenia (F),*

⁹ Autorzy pragną podziękować dr M. Araszkieviczowi za opracowanie poprawnych odpowiedzi na pytanie w ankiecie ISP, cyt. *Odczytam P. teraz kilka stwierdzeń, proszę powiedzieć, które z nich są P. zdaniem prawdziwe, a które nieprawdziwe?*

Postawy wobec przestrzegania i stosowania prawa są kolejnymi indywidualnymi cechami osobniczymi, które - w świetle literatury tematu (np. Kritzer i inni, 1991) – mogą wpływać na umiejętność poprawnej identyfikacji problemu życiowego jako problemu prawnego, i tym samym oddziaływać na podatność na występowanie problemów prawnych. W badaniu niniejszym pierwszy z wymienionych obszarów jest reprezentowany wyrażanymi przez respondenta poglądami na temat przestrzegania prawa w postaci jednej z czterech odpowiedzi na następujące pytanie: *Na temat praktycznego przestrzegania prawa w życiu są różne poglądy. Prosimy wybrać z przytoczonych zdań to, które bardziej P. odpowiada:*

1. *Powinno się zawsze przestrzegać prawa, nawet jeśli jest ono niesłuszne,*
2. *Jeśli napotyka się przepisy prawa naszym zdaniem niesłuszne, należy się do nich stosować tylko na pozór, a praktycznie starać się je omijać,*
3. *Do przepisów, które uważamy za niesłuszne nie należy się w ogóle stosować,*
4. *(nie czytać) nie wiem / trudno powiedzieć,*

przy czym zmienna objaśniana przyjmuje wartość „1” dla odpowiedzi pierwszej, zaś wartość „0” dla pozostałych opcji (zmienna PCPL w tabeli 3).

W odniesieniu do poglądów dotyczących stosowania prawa, wymiar ten jest reprezentowany jest zmienną PUSE, przyjmującą wartości całkowite z przedziału $\langle 0,3 \rangle$. Odpowiednia zmienna objaśniająca powstaje w wyniku zsumowania afirmatywnych odpowiedzi nr 1 na pytanie ankietowe, cyt. *W sytuacji konfliktu, sporu z innymi, ludzie często podejmują różne działania. Co P. zdaniem jest lepsze w takiej sytuacji?* Respondent zaznaczał jedną z odpowiedzi dla każdego z trzech zbiorów:

Zbiór 1:

1. *Zaspokojenie w pełni żądań jednej ze stron, choćby druga była z tego niezadowolona...*
2. *Doprowadzenie do obopólnej zgody na zasadzie, że każdy rezygnuje po trosze ze swych roszczeń,*
3. *(nie czytać) nie wiem / trudno powiedzieć.*

Zbiór 2:

1. *Rozstrzygnięcie sporu ściśle według przepisów prawa, choćby druga strona była z tego niezadowolona,*
2. *Rozstrzygnięcie sporu ku zadowoleniu obu stron, choćby nie było to ściśle według przepisu prawa,*
3. *(nie czytać) nie wiem / trudno powiedzieć.*

Zbiór 3:

1. Rozwiązanie sporu przez instytucję, np. sąd, która ma władzę i może narzucić swoje rozwiązanie,
2. Rozwiązanie sporu przez postronnych ludzi, którzy mogą jedynie doradzić zważnionym stronom, jak postępować,
3. (nie czytać) nie wiem / trudno powiedzieć.

Jeśli respondent wskazał pierwszą odpowiedź w poszczególnych zbiorach, przypisywana była wartość 1, natomiast w przeciwnym przypadku przypisywana była wartość 0. Dlatego też im wyższa jest wartość zmiennej *PUSE* tym bardziej pryncypialna i skargliwa postawa wobec stosowania prawa reprezentowana jest przez tę osobę. Wydaje się, że im wyższa jest wartość analizowanej zmiennej, tym wyższe jest prawdopodobieństwo zaistnienia problemu prawnego.

Postać analityczna pozostałych zmiennych objaśniających wyszczególnionych w tabeli 3 jest – jak się wydaje – na tyle jednoznaczna, że zrezygnowano z ich dokładniejszego opisu w tekście zasadniczym. Warto jednak zaznaczyć, że ze względu na brak wielowymiarowych badań empirycznych w temacie będącym przedmiotem niniejszego artykułu, nie można uzyskanych w nim wyników porównać z teoretycznym, czy empirycznym wzorcem. Dodać trzeba również, że hipotezy dotyczące związków pomiędzy indywidualnymi regresorami a regresantem, lakonicznie wyrażone oczekiwanymi znakami parametrów stojących przy danej zmiennej objaśniającej – w tym również hipotezy niekonkluzywne w odniesieniu do wpływu danego czynnika ryzyka na wystąpienie problemu prawnego – sformułowane są na gruncie socjologii i ekonomii behawioralnej, nie zaś matematycznej. Nie istnieją bowiem sformalizowane modele socjologii czy ekonomii matematycznej, które umożliwiałyby bardziej sformalizowane podejście do kwestii modelowania prawdopodobieństwa wystąpienia problemu prawnego. Dlatego kluczowa rola przypada metodom eksploracyjnym i indukcyjnym, do których zaliczyć należy niniejsze badanie.

Postać ogólna rozważanego modelu jest następująca (symbole zmiennych i oczekiwane znaki parametrów podano w tabeli 3):

$$\begin{aligned}
 y_i^* = & \alpha_0 + \alpha_1 FEM_i + \alpha_2 AGE_i + \alpha_3 AGE2_i + \alpha_4 EDUP_i + \alpha_5 EDUS_i + \\
 & + \alpha_6 SCKA_i + \alpha_7 SCZO_i + \alpha_8 SCRO_i + \alpha_9 SCWD_i + \alpha_{10} \ln DOCH_i + \\
 & + \alpha_{11} \ln DOCH2_i + \alpha_{12} RESCITY_i + \alpha_{13} WORKA_i + \alpha_{14} WORKB_i + \\
 & + \alpha_{15} SUBI_i + \alpha_{16} HTH_i + \alpha_{17} PAWR_i + \alpha_{18} PCPL_i + \alpha_{19} PUSE_i + \\
 & + \alpha_{20} SCAP_i + \alpha_{21} APAR_i + \alpha_{22} AACT_i + \alpha_{23} INTA_i + \alpha_{24} INTB_i + \\
 & + \alpha_{25} INTC_i + \varepsilon_i,
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$y_i = I\{y_i^* > 0\},$$

$$\varepsilon_i \sim F, \quad F(a) = \frac{\exp(a)}{1 + \exp(a)}$$

gdzie

y_i – zmienna dychotomiczna przyjmująca wartość 1 jeśli i -ty respondent doświadczył problemu prawnego w ostatnich 5 latach oraz 0 w przeciwnym przypadku, $i=1, \dots, N$,

y_i^* – zmienna nieobserwowalna, którą można interpretować jako skłonność i -tego respondenta do doświadczania problemu prawnego, $i=1, \dots, N$,

α_j – parametr stojący przy j -tym regresorze, $j=0, \dots, 25$.

Omówieniu wyników empirycznych badania, dla którego punktem wyjścia jest równanie, poświęcony jest kolejny punkt artykułu.

4. WYNIKI I ICH INTERPRETACJA

W tabeli 4 przedstawiono wyniki oszacowań parametrów strukturalnych równania (22). Znaki oszacowań parametrów są w większości zgodne z oczekiwaniami. Jednakże liczne ze zmiennych objaśniających równania ogólnego charakteryzują się statystyczną nieistotnością. Trudno zatem uzasadnić ich obecność w tym równaniu, zwłaszcza że fakt ten nie pozostaje bez wpływu na oszacowania parametrów strukturalnych pozostałych regresorów. Dlatego w kolejnym kroku zastosowano strategię modelowania od ogółu do szczegółu, przyjmując za kryterium obecności w modelu szczegółowym poziom istotności 20%¹⁰. Wyniki zawiera tabela 5.

Tabela 4. REZULTATY OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU ZAGREGOWANEGO OBJAŚNIAJĄCEGO PRAWDOPODOBIENSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO – WARIANT OGÓLNY

Zmienna	Oszacowanie (błąd stand.)	GPI ^a	Zmienna	Oszacowanie (błąd stand.)	GPI
Wyraz wolny	7,02 (5,99)	0,241	<i>WORKA</i>	-0,46 (0,47)	0,325
<i>FEM</i>	0,40 (0,21)	0,060	<i>WORKB</i>	-0,50 (0,47)	0,289
<i>AGE</i>	0,08 (0,04)	0,059	<i>SUBI</i>	0,10 (0,30)	0,743
<i>AGE2</i>	-0,001 (0,0005)	0,059	<i>HTH</i>	0,30 (0,24)	0,205

¹⁰ Przyjęcie tak wysokiego poziomu istotności wynika z eksploracyjnego charakteru pracy. Zgodnie ze stanem wiedzy autorów jest to bowiem pierwsze tak obszerne badanie, zaś liczne hipotezy sformułowane w tabeli 4 mają charakter pilotażowy i nie zakładają jednoznacznie określonego kierunku relacji (znaku parametru) pomiędzy regresorem a regresantem.

Tabela 4. REZULTATY OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU ZAGREGOWANEGO OBJAŚNIAJĄCEGO PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO – WARIANT OGÓLNY (dok.)

Zmienna	Oszacowanie (błąd stand.)	GPI ^a	Zmienna	Oszacowanie (błąd stand.)	GPI
<i>EDUP</i>	0,92 (0,45)	0,042	<i>PAWR</i>	-0,02 (0,05)	0,625
<i>EDUS</i>	1,48 (0,52)	0,005	<i>PCPL</i>	-0,27 (0,22)	0,216
<i>SCKA</i>	-0,13 (0,75)	0,864	<i>PUSE</i>	0,45 (0,10)	0,000
<i>SCZO</i>	0,46 (0,70)	0,513	<i>SCAP</i>	0,07 (0,23)	0,770
<i>SCRO</i>	1,56 (0,77)	0,044	<i>APAR</i>	0,09 (0,46)	0,842
<i>SCWD</i>	1,55 (0,79)	0,049	<i>AACT</i>	0,47 (0,28)	0,095
<i>lnDOCH</i>	-3,07 (1,75)	0,080	<i>INTA</i>	-0,18 (0,24)	0,447
<i>lnDOCH2</i>	0,20 (0,13)	0,130	<i>INTB</i>	-0,20 (0,26)	0,431
<i>RESCITY</i>	-0,33 (0,22)	0,131	<i>INTC</i>	0,76 (0,32)	0,017
R ² McFaddena		0,138	Testowanie symetryczności rozkładu za pomocą statystyki testu ilorazu wiarygodności		Statystyka=1,13 GPI=0,29
Udział poprawnych predykcji		65,7%	Testowanie jakości dopasowania za pomocą testu Hosmera-Lemeshowa		Statystyka=5,6 GPI=0,69
Wrażliwość		69,8%	Test Stukela symetryczności rozkładu składnika losowego		Statystyka=0,02 GPI=0,89
Specyficzność		64,2%	Test homoskedastyczności składnika losowego		Statystyka=1,4 GPI=0,50
Pole pod krzywą ROC		0,75	Liczba obserwacji		572

a We wszystkich tabelach GPI oznacza graniczny poziom istotności.

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem danych z ogólnopolskiego badania ankietowego ISP.

Liczba regresorów zmalała z wyjściowych 26-ciu w wariancie ogólnym do 13-stu w wariancie szczegółowym. Znaki parametrów przy wszystkich zmiennych objaśniających zgodne są przesłankami teoretycznymi, tam gdzie ustalenia takie były możliwe (tabela 3). Regresory reprezentują wszystkie grupy czynników wyszczególnione w tabeli 3. Za wyjątkiem dochodu i jego kwadratu oraz zamiennej *ACCT* (aktywność społeczna), wszystkie pozostałe regresory (nie licząc wyrazu wolnego) są istotne statystycznie na poziomie niższym od 10%. Miary dobroci modelu oraz wszystkie testy diagnostyczne przemawiają za uznaniem tego modelu za w pełni poprawny.

Tabela 5. REZULTATY OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU ZAGREGOWANEGO OBJAŚNIAJĄCEGO PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO – WARIANT SZCZEGÓŁOWY

Zmienna	Oszacowanie (Błąd stand.)	GPI	Zmienna	Oszacowanie (Błąd stand.)	GPI
Wyraz wolny	4,42 (5,76)	0,442	<i>SCWD</i>	1,65 (0,48)	0,001
<i>FEM</i>	0,36 (0,21)	0,085	<i>lnDOCH</i>	-2,59 (1,73)	0,134

Tabela 5. REZULTATY OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU ZAGREGOWANEGO OBJAŚNIAJĄCEGO PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYSTĄPIENIA PROBLEMU PRAWNEGO – WARIANT SZCZEGÓŁOWY (dok.)

Zmienna	Oszacowanie (Błąd stand.)	GPI	Zmienna	Oszacowanie (Błąd stand.)	GPI
<i>AGE</i>	0,08 (0,04)	0,052	<i>lnDOCH2</i>	0,17 (0,13)	0,199
<i>AGE2</i>	-0,0008 (0,0004)	0,057	<i>PUSE</i>	0,41 (0,10)	0,000
<i>EDUP</i>	0,88 (0,45)	0,050	<i>AACT</i>	0,41 (0,25)	0,106
<i>EDUS</i>	1,53 (0,51)	0,003	<i>INTC</i>	0,57 (0,27)	0,034
<i>SCZO</i>	0,55 (0,31)	0,081	Test Walda zerowych restrykcji na parametry przy zmiennych nieuwzględnionych Statystyka=7,44; GPI=0,83		
<i>SCRO</i>	1,71 (0,46)	0,000			
R ² McFaddena		0,127	Testowanie symetryczności rozkładu za pomocą statystyki testu ilorazu wiarygodności		Statystyka=0,95 GPI=0,33
Udział poprawnych predykcji		65,8%	Testowanie jakości dopasowania za pomocą testu Hosmera–Lemeshowa		Statystyka=5,1 GPI=0,74
Wrażliwość		70,4%	Test Stukela symetryczności rozkładu składnika losowego		Statystyka=0,01 GPI=0,91
Specyficzność		63,9%	Test homoskedastyczności składnika losowego		Statystyka=4,8 GPI=0,19
Pole pod krzywą ROC		0,74	Liczba obserwacji		572

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem danych z ogólnopolskiego badania ankietowego ISP.

Jeśli model powyższy uznać za wiążący, to wówczas okazuje się, że wśród czynników ryzyka największe znacznie mają czynniki demograficzne (wiek i płeć) oraz te określające stan cywilny i wykształcenie. Są to zatem uwarunkowania bądź pozawolitionalne bądź trudne do zmiany w krótkim okresie. Drugą grupę stanowią czynniki związane z postawami społecznymi (*AACT*, *INTC*) oraz postawami wobec prawa (*PUSE*). Uwarunkowania ściśle ekonomiczne reprezentowane są jedynie przez wielkość dochodu na osobę w gospodarstwie i są to jednocześnie zmienne o najniższej istotności statystycznej.

Zastosowanie strategii modelowania od ogółu do szczegółu prowadzi do wyboru jednego tylko modelu – o ustalonej liczbie regresorów – który z punktu widzenia określonych kryteriów jest modelem najlepszym. Jest to zatem sytuacja, w której „zwycięzca bierze wszystko”, zaś wszystkie inne modele objaśniające to samo zjawisko – ale o innej niż „zwycięzca” liczbie regresorów – są *implicitie* dyskredytowane, nawet w przypadku, gdy ze względu na przyjęte kryterium selekcji modele takie ustępują modelowi najlepszemu jedynie nieznacznie (szerzej w: Florczak, 2012). Ich odrzucenie jest równoznaczne z pominięciem tej wiedzy o analizowanym zjawisku, która zawarta jest w modelach zdyskredytowanych, a tym samym zaprzepaszczone zostaje możliwość wzbogacenia analizy o aspek-

ty nieobecne w modelu uznanym za najlepszy. W celu zapobieżenia tej sytuacji zastosować można metodę klasycznego uśredniania międzymodelowego (ang. *frequentist model averaging*), co uczyniono w dalszej części badania¹¹.

W tabeli 6 przedstawiono wyniki estymacji parametrów modelu warunkowego uśredniania klasycznego dla 16-stu zmiennych objaśniających (nie licząc wyrazu wolnego) o największej statystycznej istotności, które ustalono przy użyciu strategii modelowania od ogółu do szczegółu¹². Prezentowane są oszacowania parametrów uzyskane za pomocą wzoru (19), oszacowania błędów standardowych uzyskane za pomocą wzoru (20) oraz mierniki ważności poszczególnych zmiennych, uzyskane za pomocą wzoru (21). W tabeli 7 wymienione są regresory w czterech najlepszych modelach charakteryzujących się najniższymi wartościami kryterium informacyjnego Akaike. Rezultaty badania pokazują, że jedynie nieliczne zmienne – wskazywane w literaturze przedmiotu oraz uproszczonych analizach statystycznych jako potencjalnie ważne – rzeczywiście uznać można za czynniki ryzyka w kontekście występowania problemu prawnego. Przy przyjęciu bardzo tolerancyjnego poziomu istotności i zastosowaniu strategii modelowania od ogółu do szczegółu liczba takich czynników wynosi kilkanaście, zaś zastosowanie bardziej restrykcyjnego – i w kontekście badań eksploracyjnych również bardziej wskazanego – podejścia analitycznego, jakim jest metoda klasycznego uśredniania międzymodelowego, liczba takich czynników okazuje się jeszcze niższa, wynosząc w przypadku uśredniania warunkowego jedynie 7 (dla poziomu istotności równego 10%).

Tabela 6. REZULTATY OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU LOGITOWEGO PRZY UŻYCIU WARUNKOWEGO KLASYCZNEGO UŚREDNIANIA MIĘDZYMODELOWEGO

Zmienna	Oszacowanie (błąd stand.)	GPI	Ważność	Zmienna	Oszacowanie (błąd stand.)	GPI	Ważność
Wyraz wolny	-0,38 (5,05)	0,940	–	SCWD	1,59 (0,51)	0,002	0,99
FEM	0,38 (0,24)	0,113	0,64	lnDOCH	-1,36 (1,45)	0,348	0,64
AGE	0,09 (0,06)	0,134	0,64	lnDOCH2	0,07 (0,10)	0,484	0,55
AGE2	-0,0009 (0,0007)	0,199	0,65	RESCITY	-0,23 (0,19)	0,226	0,39
EDUP	0,93 (0,50)	0,063	0,79	HTH	0,26 (0,18)	0,149	0,40
EDUS	1,47 (0,52)	0,005	0,98	PCPL	-0,22 (0,14)	0,116	0,38
SCZO	0,68 (0,38)	0,074	0,76	PUSE	0,42 (0,10)	0,000	1,00
SCRO	1,71 (0,52)	0,001	1,00	AACT	0,43 (0,28)	0,125	0,59
				INTC	0,59 (0,27)	0,029	0,80

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem danych z ogólnopolskiego badania ankietowego ISP.

¹¹ Wydaje się, że metody uśredniania międzymodelowego są szczególnie wskazane w przypadku badań eksploracyjnych, gdzie trudno o teoretyczne wsparcie w postaci modeli formalnych, i gdzie – m.in. właśnie za sprawą wcześniej wzmiankowanej przyczyny – liczba potencjalnych regresorów jest bardzo duża.

¹² Oznaczało to ustalenie poziomu istotności równego 30%.

Tabela 7. ZMIENNE OBJAŚNIAJĄCE WYSTĘPUJĄCE W CZTERECH NAJLEPSZYCH MODELACH

Model	1	2	3	4
Zmienne	INTC AATC FEM lnDOCH PUSE SCRO SCWD EDUP EDUS SCZO	INTC AATC FEM lnDOCH PUSE SCRO SCWD AGE AGE2 EDUP EDUS SCZO	INTC AATC lnDOCH PUSE SCRO SCWD EDUP EDUS SCZO	INTC AATC FEM lnDOCH lnDOCH2 PUSE SCRO SCWD EDUP EDUS SCZO

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem danych z ogólnopolskiego badania ankietowego ISP.

Na podstawie uzyskanych wyników można wnioskować, że ze zbioru czynników ryzyka wykluczyć należy te z nich, które w tabeli 3 przypisano do grupy uwarunkowań społeczno-ekonomicznych (dochód, miejsce zamieszkania, stan zdrowia). Wykluczenie takie może nieco zaskakiwać, biorąc pod uwagę wnioski płynące z wcześniejszych – ale dodajmy jednowymiarowych – badań (Legal Service Corporation, 1994; Murayama, 2007; Gramatikov, 2008).

Kluczowymi – jak wynika z analizy ważności zmiennych (tabele 6 i 7) – czynnikami zwiększającymi ryzyko doświadczenia problemu prawnego jest indywidualna postawa wobec prawa, aproksymowana zmienną *PUSE*, oraz stan cywilny wskazujący na „życiowe przejścia” i samotność (rozwodnicy (*SCRO*), osoby owdowiałe (*SCWD*)). Okazuje się zatem, że subiektywny stosunek wobec stosowania prawa jest trwałym czynnikiem wpływającym na indywidualną skłonność do interpretowania pojawiających się zdarzeń życiowych w kategoriach problemów prawnych, co sprawia, iż osoby o pryncypialnym stosunku wobec prawa częściej doświadczają takich problemów (Kurczewski, Fuszara, 2004). W grupie osób charakteryzujących się wyższą wartością „indeksu skargliwości” (zmienna *PUSE*) wyższa jest szansa zaistnienia problemu prawnego w porównaniu z osobami charakteryzującymi się niskimi wartościami tego indeksu.

Osoby rozwiedzione i owdowiałe wyraźnie częściej niż osoby stanu wolnego lub żyjące w konkubinacie doświadczają problemów prawnych (ilorazy szans wystąpienia problemu u takich osób wynoszą odpowiednio 5,53 ($\exp(1,71)$) i 4,90 ($\exp(1,59)$)). Bezspornie ważnymi okolicznościami wpływającymi na prawdopodobieństwo zaistnienia problemu prawnego są zmienne zastane, takie jak płeć i wiek. Kobiety częściej niż mężczyźni doświadczają problemów prawnych (iloraz równy 1,46), zaś wraz z wiekiem maleje podatność na jego doświadczanie. Zgodnie z wnioskami płynącymi z wcześniejszych analiz wzrost wykształcenia implikuje *ceteris paribus* wyższą podatność na wystąpienie problemów prawnych (ilorazy szans dla zmiennych *EDUP* i *EDUS* wynoszą odpowiednio 2,53 i 4,35).

Ostatnią grupę stanowią zmienne opisujące aktywność społeczną. Okazuje się, że – w świetle wyników niniejszego badania – czynny udział w życiu społecznym uznać należy za stymulantę pojawienia się problemu prawnego (ilorazy szans dla zmiennych *AACT* i *INTC* wynoszą odpowiednio 1,54 i 1,80). Trudno jednak wskazać na behawioralny mechanizm takiego związku. Być może pasem transmisyjnym jest możliwość szerszego korzystania z nieformalnej pomocy innych osób w procesie identyfikowania doświadczanego problemu życiowego jako prawnego, albo działanie w imieniu innych, czyli przedstawianie problemów innych osób, jako własnych.

Zastosowanie adekwatnych narzędzi analizy wielowymiarowej ograniczyło liczebność potencjalnych czynników ryzyka zaistnienia problemu prawnego do zaledwie kilku. Obok konkluzji szczegółowych, omówionych powyżej, wskazać można na dwa meta-wnioski płynące z badania. Po pierwsze, identyfikacja indywidualnych czynników ryzyka i kwantyfikacja ich wpływu na prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego może być szczególnie użyteczna w przypadku prób ustanowienia systemu ubezpieczeń od takiego zdarzenia losowego. Po drugie, zidentyfikowane i skwantyfikowane czynniki ryzyka są raczej mało użyteczne w kontekście rozważań nad alokacją środków publicznych na funkcjonowanie obecnego systemu nieodpłatnej pomocy prawnej, głównie ze względu na brak odpowiednich danych na poziomie mezo (powiatów). Dlatego wydaje się, że alokacja tych środków jedynie według kryterium liczebności populacji jest rozwiązaniem właściwym (Florczak, 2015, 2017).

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w artykule badanie jest pierwszą tak szeroką próbą zastosowania narzędzi wielowymiarowej analizy statystyczno-ekonometrycznej do badania zjawisk standardowo przypisywanych do dziedziny nauk prawnych, i które do tej pory analizowane były za pomocą jednowymiarowych narzędzi statystyki opisowej. W celu zrealizowania zamierzonych celów badawczych zastosowano sekwencję metod analitycznych nieczęsto stosowaną w praktyce modelowania (model logitowy + strategia modelowania od ogółu do szczegółu + uśrednianie klasyczne).

Rezultaty i wnioski płynące z badania dają asumpt do dalszych analiz, w tym np. nad sposobami reakcji osób dotkniętych problemem prawnym, czy indywidualnymi efektami pomocy prawnej. Wszystkie takie badania ograniczone są jednak do wymiaru mikroekonomicznego, co wynika z rodzaju użytych w nich danych. Warto jednak wskazać na możliwość jakościowego poszerzenia kontekstu poznawczego tego typu badań poprzez ich połączenie z danymi mezo, czy nawet makroekonomicznymi, co umożliwiają metody modelowania hierarchicznego. Stanowić to będzie kolejny cel naukowy autorów niniejszego artykułu.

LITERATURA

- Akaike H., (1974), A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19, 716–723.
- Barendrecht J. M., de Langen M., (2008), Legal Empowerment of the Poor: Innovating Access to Justice, w: *The State of Access: Success and Failure of Democracies to Create Equal Opportunities*, Brookings Institution Press, Washington, 250–271.
- Burdziej S., Dudkiewicz M., (2013), *Korzystający i niekorzystający z poradnictwa prawnego i obywatelskiego*, Instytut Spraw Publicznych, ISP, Warszawa.
- Burnham K. P., Anderson D. R., (2002), *Model Selection and Multimodel Inference. A Practical Information – Theoretic Approach*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.
- Burnham K. P., Anderson D. R., (2004), Multimodel Inference. Understanding AIC and BIC in Model Selection, *Sociological Methods and Research*, 33, 261–304.
- Cameron A. C., Trivedi P. K., (2009), *Microeconometrics. Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Coumarelos C., Wei Z., Zhou A. Z., (2006), *Justice Made to Measure. NSW Legal Survey in Disadvantaged Areas*, Law and Justice Foundation, South Wales.
- Curran L., (2007), *Ensuring Justice and Enhancing Human Rights: A Report on Improving Legal Aid Service Delivery to Reach Vulnerable and Disadvantaged People*, La Trobe University and the Victoria Law Foundation, La Trobe.
- Currie A., (2006), A National Survey of the Civil Justice Problems of Low- and Moderate-Income Canadians: Incidence and Patterns, *International Journal of Legal Profession*, 13 (3), 217–242.
- Florczak W., (2012), O możliwości zintegrowanej weryfikacji empirycznej alternatywnych teorii na przykładzie teorii przestępczości, *Ekonomista*, 6/212, 735–764.
- Florczak W., (2015), Ile może kosztować reforma systemu pomocy prawno-obywatelskiej w Polsce, *Studia Prawno-Ekonomiczne*, 95, 189–206.
- Florczak W., (2017), Szacunki kosztów systemu pomocy prawno-obywatelskiej w Polsce, *Wiadomości Statystyczne*, 1, 7–25.
- Gramatikov M., (2008), Multiple Justiciable Problems in Bulgaria, *Tilburg University Legal Studies Working Paper*, 16/2008.
- Gruszczyński M., (2010), Modele zmiennych jakościowych dwumianowych, w: *Mikroekonometria. Modele i metody analizy danych indywidualnych*, Oficyna Wolters Kluwer Business, Warszawa, 53–101.
- Hosmer D. W., Lemeshow S., (1980), Goodness-of-fit Tests for the Multiple Logistic Regression Model, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 9, 1043–1069.
- Hunter R., De Simone T., (2009), Women, Legal Aid and Social Inclusion, *Australian Journal of Social Issues*, 44 (4), 379–398.
- Kritzer H. M., (2008), To Lawyer or Not to Lawyer: Is that the Question?, *Journal of Empirical Legal Studies*, 5, 875–906.
- Kritzer H. M., (2009), Examining the Real Demand for Legal Services, *Fordham Urban Law Journal*, 37, 255–272.
- Kritzer H. M., Bogart W. A., Vidmar N., (1991), *Context, Context, Context: A Cross-problem, Cross-Cultural Comparison of Compensation Seeking Behaviour*, Paper Prepared for Law and Society, Amsterdam.
- Kurczewski J., Fuszara M., (red.), (2004), *Polskie spory i sądy*, Ośrodek Badań Społecznych ISNS. Uniwersytet Warszawski, Warszawa.
- Lechner M., (1991), Testing Logit Models in Practice, *Empirical Economics*, 16, 177–198.
- Legal Service Corporation, (1994), *Legal Needs and Civil Justice, A survey of Americans. Major Finding, from Comprehensive Legal Needs Study*, American Bar Association, Chicago, Illinois.

- Marzec J., (2008), *Bayesowskie modele zmiennych jakościowych i ograniczonych w badaniach niespłacalności kredytów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- McFadden D., (1974), The Measurement of Urban Travel Demand, *Journal of Public Economics*, 3, 303–328.
- Moorhead R., Douglas G., Doughty J., Sefton M., (2004), The Advice Needs of Lone Parents, *Family Law*, 34, 667–673.
- Murayama M., (2007), Experiences of Problems and Disputing Behaviour in Japan, *Meiji Law Journal*, 14, 1–59.
- Osiewlaski J., Marzec M., (2004), Uogólnienie dychotomicznego modelu probitowego z wykorzystaniem skośnego rozkładu Studenta, *Przegląd Statystyczny*, 51, 13–24.
- Pleasence P., Balmer N., Reimers S., (2011), What Really Drives Advice Seeking Behaviour? Looking Beyond the Subject of Legal Disputes, *Onati Socio-Legal Series*, 1, 1–21.
- Pleasence P., Buck A., Balmer N., O'Grady A., Genn H., Smith H., (2004), Causes of Action: Civil Law and Social Justice. The Final Report of the First LSRC Survey of Justiciable Problems, *Legal Service Commission Working Paper*.
- Peisert A., Schimanek T., Waszak M., Winiarska A., (red.), (2013), *Poradnictwo Prawne i Obywatelskie w Polsce, Stan obecny i wizje przyszłości*, Instytut Spraw Publicznych, ISP, Warszawa.
- Sączewska-Piotrowska A., (2016), Zastosowanie krzywych ROC w analizie ubóstwa miejskich i wiejskich gospodarstw domowych, *Przegląd Statystyczny*, 63, 211–232.
- Stukel T. A., (1988), Generalized Logistic Models, *Journal of American Statistical Association*, 83, 426–431.
- Świadek A., Wojciech M., (2015), Analiza skłonności przedsiębiorstw z wiodących regionów Polski do inwestowania w nowe środki trwałe z wykorzystaniem modelu logitowego uwzględniającego interakcje zmiennych jakościowych, *Przegląd Statystyczny*, 62, 117–138.
- Thomas J. M., (1993), On Testing the Logitsic Assumption in Binary Dependent Variable Models, *Empirical Economics*, 18, 381–392.
- Winczorek J., (2015), *Przegląd literatury na temat dostępności i korzystania z pomocy prawnej*, INPRIS, Instytut Prawa i Społeczeństwa, Warszawa.

CO WPŁYWA NA WIELKOŚĆ POPYTU NA PORADY PRAWNE? ANALIZA LOGITOWA Z WYKORZYSTANIEM METODY KLASYCZNEGO UŚREDNIANIA MIĘDZYMODELOWEGO

Streszczenie

Celem artykułu jest identyfikacja – na podstawie przeglądu literatury – i kwantyfikacja, przy użyciu modelu logitowego, wpływu czynników ryzyka na prawdopodobieństwo wystąpienia problemu prawnego w Polsce. Zbiór regresorów objął czynniki obiektywne – takie jak dochód, wiek, wykształcenie, stan cywilny, miejsce zamieszkania, sytuację zawodową – oraz subiektywne: postawę wobec prawa, świadomość prawną, kapitał ludzki oraz aktywność społeczną. Z badania, przeprowadzonego na reprezentatywnej próbie dorosłych Polaków, wynika, że czynniki ryzyka znajdują się poza obszarem oddziaływania instytucjonalnego. Dlatego alokacja środków publicznych na funkcjonowanie nieodpłatnego systemu pomocy prawnej w oparciu o kryterium liczebności populacji

wydaje się właściwa. Ze względu na brak analogicznych analiz oraz eksploracyjny charakter badania, dla ostatecznego ustalenia zbioru statystycznie istotnych regresorów zdecydowano się na zastosowanie metody logitowego uśredniania klasycznego. Jej użycie nie zmieniło znacząco wniosków płynących z analizy klasycznej.

Słowa kluczowe: problemy prawne, popyt na usługi prawne, model logitowy, klasyczna metoda uśredniania międzypodelowego

WHAT INFLUENCES DEMAND FOR LEGAL AID? LOGIT ANALYSIS WITH USE OF CLASSICAL MODEL AVERAGING

Abstract

The aim of this paper to identify, by means of relevant literature survey, and then to quantify – using representative panel of individual questionnaire data and a logit model – the impact of relevant factors affecting demand for legal aid in Poland. The set of explanatory variables contains objective factors – such as income, age, education, gender, marital status, place of residence, occupational status – as well as subjective ones, such as personal attitude towards law, knowledge of law, social capital or social activity. It follows from the results obtained on a representative sample of adult Poles that the number of factors influencing the occurrence of a legal problem is large, the factors themselves being beyond the scope of direct and intentional impact of the state. Thereby, it seems reasonable to allocate the funds devoted to the funding and functioning of the reformed legal aid system in Poland on the basis of the population size criterion. In view of the relative scarcity of quantitative research into the issues raised in the paper frequentist model averaging method has been also used to confirm/reject the conclusions draw on the basis of the logit model. However, this has not altered the afore-mentioned conclusions in any significant way.

Keywords: logit model, legal problems, demand for legal services, classical model averaging

Daniel KOSIOROWSKI¹
Jerzy P. RYDLEWSKI²
Zygmunt ZAWADZKI³

Wykrywanie funkcjonalnych obserwacji odstających na przykładzie monitorowania jakości powietrza⁴

1. WSTĘP

Istnieje szereg zjawisk i obiektów ekonomicznych, które w naturalny sposób dają opisywać się za pomocą funkcji pewnego kontinuum. Mamy tutaj na uwadze między innymi dobową aktywność uczestników rynku finansowego, trajektorie rozwoju przedsiębiorstw, krzywe użyteczności konsumentów bądź funkcje obrazujące rozkład dochodów gospodarstw domowych w pewnym państwie. W ostatnich latach w literaturze statystycznej zaproponowano nowatorską metodologię statystyczną, która pozwala analizować dane funkcjonalne (patrz Bosq, 2000; Ramsay i inni, 2009; Horváth, Kokoszka, 2012; Górecki i inni, 2014). Wspomnianą metodologię określa się mianem funkcjonalnej analizy danych (ang. *Functional Data Analysis, FDA*). FDA to obszar współczesnej statystyki, w ramach którego bada się objekty wielowymiarowe, przy czym objekty te rozpatruje się ze względu na cechę, którą w naturalny sposób można indeksować pewną niezależną zmienną, związaną na przykład z czasem bądź przestrzenią. FDA jest zasadniczo odmienna od jedno- i wielowymiarowej analizy danych statystycznych zarówno z punktu widzenia matematycznego jak i empirycznego. Najważniejsza różnica polega na tym, że na obserwacje patrzymy jak na realizacje funkcjonalnej zmiennej losowej albo jak na trajektorie odpowiednio zdefiniowanego procesu stochastycznego. Za wymienionymi wyżej autorami rozważamy krzywą losową jako funkcję rzeczywistą, której dziedziną jest przedział

¹ Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Rakowicka 27, 31–510 Kraków, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: daniel.kosiorowski@uek.krakow.pl.

² AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie, Wydział Matematyki Stosowanej, Katedra Równań Różniczkowych, al. Mickiewicza 30, 30–059 Kraków, Polska.

³ Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Rakowicka 27, 31–510 Kraków, Polska (członek zespołu badawczego w Katedrze Statystyki UEK w Krakowie).

⁴ Daniel Kosiorowski uprzejmie dziękuje za wsparcie finansowe ze strony UEK w Krakowie w postaci środków na utrzymanie potencjału badawczego przyznanych Wydziałowi Zarządzania w latach 2017 i 2018, Jerzy P. Rydlewski uprzejmie dziękuje za wsparcie finansowe ze strony AGH w Krakowie, dotacja statutowa dla WMS grant numer 11.11.420.004.

$[0, T]$, gdzie T jest znane. Takie funkcje traktujemy jako elementy ośrodkowej przestrzeni Hilberta $L^2[0, T]$ funkcji całkownych z kwadratem z naturalnym dla tej przestrzeni iloczynem skalarnym. W monografii Bosq (2000) dowiedziono, że istnieją rozkłady prawdopodobieństwa dla tak określonych obiektów funkcjonalnych o wartościach w przestrzeni Hilberta.

Funkcjonalne szeregi czasowe są ciągami funkcji indeksowanymi kolejną chwilą, w której czyniona jest obserwacja. Próby obserwacji są realizacjami losowych funkcji, tj. losowych elementów pewnych przestrzeni funkcyjnych, które na ogół są nieskończeniewymiarowymi, rzeczywistymi, ośrodkowymi przestrzeniami Banacha lub Hilberta. Ośrodkowość jest kluczowym założeniem, bowiem zapewnia, że liniowa kombinacja elementów losowych jest takim elementem losowym. Załóżmy, że rozważamy losowe funkcje postaci $X: (\Omega, \mathcal{B}, P) \rightarrow V$, gdzie $(\Omega, \mathcal{B}, P,)$ jest przestrzenią probabilistyczną oraz V oznacza rzeczywistą i ośrodkową przestrzeń Banacha lub Hilberta wyposażoną w normę $\|\cdot\|$, przy czym w przypadku przestrzeni Hilberta norma indukowana jest przez iloczyn skalarny. Dla wszystkich $\omega \in \Omega$ mamy $X_\omega: t \rightarrow X(\omega, t) \in V$. Rzecz jasna, zwykle dysponujemy danymi dyskretnymi, które następnie przekształcamy do postaci funkcji. W tym celu stosuje się interpolację bądź częściej wygładzanie za pomocą skończonej liniowej kombinacji wybranych funkcji bazowych. Zwykle są to baza Fouriera albo baza złożona ze sklejek funkcji (ang. *B-spline*). W przypadku zastosowań ekonomicznych (nietyпова okresowość zjawiska bądź brak okresowości) rozsądniej jest zastosować bazę złożoną ze sklejek. Baza Fouriera wybierana jest dla funkcji okresowych lub prawie okresowych. Konieczność ograniczenia się do bazy skończonej powoduje redukcję liczby wymiarów i pewne wygładzenie obiektów funkcjonalnych. Wybór liczby funkcji bazowych ma wpływ na wszystkie przeprowadzane dalej obliczenia. Gdy dane są już wyrażone jako funkcje, to kolejnym krokiem jest dokonanie ich transformacji za pomocą analizy składowych głównych (por. Ramsay i inni, 2009; Horváth, Kokoszka, 2012; dla wielowymiarowych danych funkcjonalnych patrz Górecki i inni, 2018).

W ramach FDA rozważa się szereg metod wnioskowania statystycznego. Niektóre z nich stanowią funkcjonalne uogólnienia znanych metod statystyki jedno i wielowymiarowej. Mamy tu na uwadze, przykładowo, funkcjonalną analizę wariacji, funkcjonalny test Wilcoxona bądź funkcjonalne regresje. Podobnie jak ma to miejsce w przypadku jedno- i wielowymiarowego wnioskowania, tak i w przypadku FDA jakość wnioskowania krytycznie zależy od występowania pośród danych tzw. obserwacji odstających. O ile jednak metodykę wykrywania obserwacji odstających w przypadku wielowymiarowym cechuje znaczący stopień zaawansowania, to nie jest tak w przypadku FDA. W przypadku funkcjonalnym wnioskowanie bazuje często na niewielkiej liczbie obserwacji w porównaniu do liczby stopni swobody, ponadto obserwacje funkcjonalne stosunkowo łatwo można zanieczyścić. Podczas wykonywania analizy statystycznej można dosyć

łatwo pomylić obserwacje odstające z błędem. Tymczasem mogą one nieść sporo istotnych informacji o badanym zjawisku. Nieuwzględnienie tej wiedzy może prowadzić do błędnego wyboru modelu, estymacji obciążonej albo wręcz do otrzymania niepoprawnych rezultatów. Dlatego też ważne jest zidentyfikowanie obserwacji odstających przed wykonaniem właściwego modelowania i analizy danych. Trzeba dodać w tym miejscu, że jak na razie, pomimo podejmowania pewnych prób (patrz Hubert i inni, 2015), nie istnieje powszechnie akceptowana definicja funkcjonalnych obserwacji odstających. Niemniej, istnieją dwa podejścia do problemu radzenia sobie z obserwacjami odstającymi. Pierwsze podejście zakłada wykrycie obserwacji odstających, a następnie ich usunięcie ze zbioru analizowanych danych i zastosowanie znanych metod do oczyszczonego zbioru danych. Drugie podejście zakłada stosowanie metod odpornych od samego początku, prowadzenie wnioskowania statystycznego na podstawie naszej wiedzy o ich rozkładach. Zwróćmy uwagę, że w pierwszym podejściu, obserwacje odstające usuwa się ze zbioru danych na podstawie arbitralnej decyzji statystyka, jakiegokolwiek zaawansowanej metody by nie użył.

W celu wykrycia funkcjonalnych obserwacji odstających stosuje się, zaproponowany przez Suna, Gentona (2011), funkcjonalny wykres pudełkowy, który umożliwia zobrazowanie rozkładu danych funkcjonalnych oraz wykrycie krzywych nietypowych dla analizowanego zbioru danych. Jak na razie, pomimo braku formalnych definicji, istnieje zgoda co do tego, by obserwacje odstające dzielić na dwa typy: obserwacje odstające ze względu na amplitudę (ang. *magnitude outliers*) oraz na kształt (ang. *phase outliers*, *shape outliers*). Odzwierciedla to zmienność funkcji ze względu na różnicę skali oraz położenia. Do wykrycia „shape outliers” używa się zaproponowanego przez Arribas-Gil, Romo (2014) wykresu wartości odstających (ang. outliergram) a następnie usuwa się je z analizowanego zbioru danych. Następnie, za pomocą funkcjonalnego wykresu pudełkowego można wykryć obserwacje odstające ze względu na amplitudę (patrz: Tarabelloni, 2017). Do podstawowych pakietów statystycznych służących analizie danych funkcjonalnych należą pakiety środowiska R *fda* (Ramsay i inni, 2009) i *fda.usc* (patrz Febrero-Bande, de la Fuente, 2012). Wykrywanie funkcjonalnych obserwacji odstających umożliwiają m. in. pakiety R *roahd* (patrz Tarabelloni, 2017) oraz *DepthProc* (patrz Kosiorowski, 2012).

Celem niniejszej pracy jest wykorzystanie przedstawionej wyżej metodyki do wykrycia nietypowych obserwacji funkcjonalnych pokazujących zanieczyszczenie powietrza pyłem PM10 w Katowicach oraz w Krakowie. Umożliwia to decydom wykrycie odcinków czasu, kiedy poziom zanieczyszczenia powietrza jest szczególnie dokuczliwy. Pozwala to w konsekwencji odpowiednio optymalizować miejską i regionalną politykę w zakresie ochrony środowiska, minimalizować negatywny wpływ zanieczyszczenia powietrza na zdrowie mieszkańców i atrakcyjność turystyczną regionu.

2. GŁĘBIA DLA DANYCH FUNKCJONALNYCH

Jako pierwszy pojęcie głębi zdefiniował Tukey (1975) chcąc umożliwić porządkowanie danych wielowymiarowych, aby następnie umożliwić korzystanie z wypracowanych dla przypadku jednowymiarowego metod statystycznych. Wprowadzona w ten sposób głębia Tukeya (głębia domkniętej półprzestrzeni) znajduje odtąd różnorakie zastosowania. Kolejny rodzaj głębi, głębię symplecjonalną, wprowadziła Liu (1990). Od tego czasu w literaturze i w zastosowaniach pojawiło się wiele innych rodzajów głębi (głębia przestrzenna, głębia Mahalanobisa). Wprowadzenie pojęcia głębi umożliwia zdefiniowanie w naturalny sposób kwantyli dla danych wielowymiarowych.

Pojęcie głębi poddano wnikliwym badaniom teoretycznym i empirycznym w pracach Liu, Singh (1993), Liu i inni (1999), Zuo, Serfling (2000a, 2000b) oraz Mosler (2013), Kosiorowski (2012), Kosiorowski (2016), Kosiorowski i inni (2017).

Głębię w przypadku wielowymiarowym można zdefiniować następująco. Rozważmy borelowską σ – algebrę B podzbiorów \mathfrak{R}^p oraz rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa P zdefiniowanych na B . Miara głębi jest funkcją postaci

$$D: \mathfrak{R}^p \times P: (z, P) \rightarrow D(z|P) \in [0,1]. \quad (1)$$

Dysponując wektorem losowym $X: (\Omega, B) \rightarrow \mathfrak{R}^p$ z indukowanym rozkładem prawdopodobieństwa P_x powiemy, że $D(\cdot | P_x): \mathfrak{R}^p \rightarrow [0,1]$ jest statystyczną funkcją głębi. Stwierdzimy też, że $D(z|X) \in [0,1]$ jest głębią punktu z względem rozkładu prawdopodobieństwa wektora X . Dla próby $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ z X , zdefiniujemy empiryczną funkcję głębi jako wielkość $D(\cdot | X^n) = D(\cdot | \tilde{P}_n)$, gdzie P_x zostaje zastąpiony przez rozkład empiryczny \tilde{P}_n .

Dla danego wektora losowego X , miary głębi D oraz wartości $\alpha \in [0,1]$ definiujemy α – obszar centralny jako $C_\alpha(X) = \{z \in \mathfrak{R}^p: D(z|X) \geq \alpha\}$. Umożliwia nam to porządkowanie danych względem pewnego centrum, wyznaczonego przez dane oraz wybraną głębię.

Z czasem pojawiły się definicje głębi dla danych funkcjonalnych (por. np. Fraiman, Muniz, 2001; Cuevas i inni, 2006). Najbardziej chyba powszechną definicję głębi funkcjonalnej, głębię pasma (ang. *band depth*, *BD*) oraz zmodyfikowaną głębię pasma (ang. *modified band depth*, *MBD*) wprowadzili López-Pintado, Romo (2007, 2009). Głębia tego rodzaju oparta jest na pomiarze jak często dana funkcja znajduje się w paśmie tworzonym przez inne funkcje pochodzące z tej samej próbki danych funkcyjnych. Jednocześnie López-Pintado, Jörnsten (2007) podały definicje uogólnionej głębi pasma (ang. *generalized band depth*, *GBD*) oraz skorygowanej uogólnionej głębi pasma (ang. *corrected generalized band depth*, *cGBD*), które wydają się rozsądnym rozszerzeniem definicji głębi pasma w tym sensie, że pozwalają uwzględnić krzywe

różniące się kształtem czy amplitudą. Pozwala to na wykrywanie obserwacji odstających oraz na prowadzenie bardziej odpornej analizy dla danych funkcjonalnych. Dlatego też w naszych dalszych rozważaniach skupiamy się na tym rodzaju głębi funkcjonalnej.

Podstawowe własności głębi pasma oraz innych głębi funkcjonalnych badali Mosler, Polyakova (2016) oraz Nieto-Reyes, Battey (2016). Najpowszechniejsze zastosowanie głębi wynika z możliwości definiowania opartych na głębiach kwantyli. Dobre statystyczne własności takich obiektów (mierzalność w odpowiednim sensie oraz zgodność) udowodnili Gijbels, Nagy (2015) dla niektórych klas głębi funkcjonalnych niecałkowalnych oraz Nagy i inni (2016) dla klasy głębi funkcjonalnych całkowalnych. Głębia należy do klasy głębi funkcjonalnych (por. Def. 2.3 Nagy i inni, 2016), jeżeli daje się wyrazić jako „zwykła” całka Lebesgue’a ze zwykłej funkcji głębi jednowymiarowej liczonej dla krzywej względem brzegowego rozkładu prawdopodobieństwa. Do klasy głębi funkcjonalnych całkowalnych należy MBD oraz niektóre rodzaje uogólnionych głębi pasma. Które dokładnie, pozostaje wciąż otwartym problemem.

Celem dalszych rozważań podamy za López-Pintado, Romo (2009) definicję MBD. Dla każdej funkcji x pochodzącej z próby funkcyjnej $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ oraz dla dowolnego $j=1,2,\dots,n$ niech

$$A_j(x) \equiv A(x; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}) \equiv \left\{ t \in I: \min_{r=i_1, \dots, i_j} x_r(t) \leq x(t) \leq \max_{r=i_1, \dots, i_j} x_r(t) \right\}. \quad (2)$$

będzie podzbiorem przedziału I (na którym określona jest funkcja x), na którym funkcja x zawiera się w paśmie wyznaczanym przez obserwacje $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}$. Niech λ oznacza miarę Lebesgue’a, wtedy dla $j=2,3,\dots,n$ definiujemy wielkość

$$MBD_n^{(j)}(x) = \binom{n}{j}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \frac{\lambda(A_j(x))}{\lambda(I)} \quad (3)$$

mierzącą „jak często” (czyli przy założeniu, że I jest przedziałem czasu) dana obserwacja x zawiera się w paśmie. Jeżeli ustalimy $J=2,3,\dots,n$, to zmodyfikowana głębia pasma funkcji x względem próby X^n równa się

$$MBD_{n,J}(x) = \sum_{j=2}^J MBD_n^{(j)}(x). \quad (4)$$

W zastosowaniach przyjmujemy zwykle $J=2$, czyli rozważamy wyłącznie pasma generowane przez każdą z par funkcji. Teoretyczna wersja MBD ma postać

$$MBD_J(x) = \sum_{j=2}^J MBD^{(j)}(x), \quad (5)$$

gdzie $MBD^{(j)}(x) = E \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \frac{\lambda(A_j(x; X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_j}))}{\lambda(I)}$.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku skończonego-wymiarowym wartość $MBD_n^{(j)}(X)$ definiowana jest jako proporcja współrzędnych x zawartych w przedziale tworzonym przez j różnych punktów z próbki (por. López-Pintado, Romo, 2009). W przypadku jedno-wymiarowym BD, która oparta jest o obliczenie proporcji, jak często dana krzywa jest w całym przedziale I zawarta w kolejnym paśmie generowanym przez pozostałe obserwacje, to po prostu MBD. Ponadto BD w większym stopniu niż MBD uwzględnia kształt krzywych. Tymczasem MBD uwzględnia w większym stopniu amplitudę lub ilość krzywych niż ich kształt. Warto zanotować, że krzywe pozostające prawie zawsze w centrum i przyjmujące wartości ekstremalne w niewielkich przedziałach będą miały sporą wartość MBD, a niedużą wartość BD. Użycie takiego czy innego rodzaju głębi zależy od rodzaju analizowanych funkcji oraz od celu przeprowadzanego wnioskowania. Gdy krzywe są bardzo nieregularne, zastosowanie MBD umożliwi otrzymanie mniejszej liczby danych powiązanych (ang. *ties*), niemniej nie pozwoli na analizowanie różnego kształtu tych krzywych.

3. WYKRES WARTOŚCI ODSTAJĄCYCH

Wykrywanie obserwacji odstających typu „phase” dla jednowymiarowych danych funkcjonalnych zostało zaproponowane w pracy Arribas-Gil, Romo (2014). Podejście to opiera się na zależnościach pomiędzy zaproponowaną przez López-Pintado, Romo (2011) zmodyfikowaną głębią pasma (ang. *Modified Band Depth*, MBD) oraz zmodyfikowanym indeksem nadwykresu funkcji (ang. *Modified Epigraph Index*, MEI) wprowadzonym przez Martin-Barregana i innych (2015). Przypadek wielowymiarowy rozważali Ieva, Paganoni (2016).

Rozważamy losową funkcję X o wartościach w $V = C^0(I)$, $I \subset \mathfrak{R}$, wtedy dla elementu $Z \in V$ definiujemy indeks nadwykresu (ang. *epigraphic index*, EI) oraz indeks podwykresu (ang. *hypographic index*, HI) wzorami:

$$EI(Z|X) = P(\{Z(t) \leq X(t), \forall t \in \mathfrak{R}\}) = P(\{G(X) \subseteq epi(Z)\}), \quad (6)$$

$$HI(Z|X) = P(\{Z(t) \geq X(t), \forall t \in \mathfrak{R}\}) = P(\{G(X) \subseteq hyp(Z)\}), \quad (7)$$

gdzie *epi* oznacza nadwykres funkcji, a *hyp* oznacza podwykres funkcji.

Interpretacja obu obiektów jest czytelna, mianowicie EI mierzy prawdopodobieństwo, że obserwacja znajduje się całkowicie powyżej wykresu Z , natomiast HI mierzy prawdopodobieństwo, że obserwacja znajduje się całkowicie poniżej wykresu Z .

Korzystając z analogii do definicji zmodyfikowanej głębi pasma, można zdefiniować zmodyfikowane wersje obu indeksów:

$$MEI(Z|X) = E \frac{\lambda(\{t \in I: Z(t) \leq X(t)\})}{\lambda(I)} = \frac{1}{\lambda(I)} \int_I P(Z(t) \leq X(t)) dt \quad (8)$$

$$MHI(Z|X) = E \frac{\lambda(\{t \in I: Z(t) \geq X(t)\})}{\lambda(I)} = \frac{1}{\lambda(I)} \int_I P(Z(t) \geq X(t)) dt \quad (9)$$

gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a.

Wersje próbkowe MEI oraz MHI dla losowej próby X_1, \dots, X_N przyjmują postać

$$MEI(Z|X^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda(\{t \in I: Z(t) \leq X_i(t)\})}{\lambda(I)} \quad (10)$$

oraz

$$MHI(Z|X^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda(\{t \in I: Z(t) \geq X_i(t)\})}{\lambda(I)}.$$

W pracy Arribas-Gil, Romo (2014) pokazano zaskakująco łatwą do zobrazowania zależność pomiędzy MEI oraz MBD. Relacja ta może zostać wykorzystana do wykrywania obserwacji odstających ze względu na kształt. Prawdziwa jest mianowicie nierówność:

$$MBD(Z|X^N) \leq \alpha_0 + \alpha_1 MEI(Z|X^N) + \alpha_2 N^2 MEI^2(Z|X^N), \quad (11)$$

gdzie $\alpha_0 = \alpha_2 = -2/N(N-1)$ oraz $\alpha_1 = 2(N+1)/(N-1)$.

„Nietypowe” obserwacje funkcjonalne ze względu na kształt cechuje mała wartość MBD w porównaniu do parabolicznej zależności w równaniu powyżej, a więc duża różnica pomiędzy lewą i prawą stroną nierówności jest charakterystyczna dla obserwacji odstających. Tymczasem obserwacje „typowe” będą się koncentrowały wokół opisanej powyższym równaniem paraboli. Wykres wartości

odstających pozwala wyrazić graficznie zmienność MBD ze względu na MEI, co czyni możliwą identyfikację obserwacji odstających ze względu na kształt. Ostatnio Ieva, Paganoni (2016) uogólnili wykres wartości odstających dla przypadku wielowymiarowych danych funkcjonalnych. Przypomnijmy, że po zastosowaniu wykresu wartości odstających pozostaną obserwacje odstające ze względu na amplitudę. W celu ich wykrycia stosuje się odpowiedni funkcjonalny wykres pudełkowy.

4. FUNKCJONALNY WYKRES PUDEŁKOWY

Klasyczny funkcjonalny wykres pudełkowy wprowadzili Sun, Genton (2011). Podobnie jak dla przypadku jednowymiarowych danych rzeczywistych, funkcjonalny wykres pudełkowy służy do zobrazowania rozkładów prawdopodobieństwa analizowanych danych i tym samym służy do określenia obserwacji centralnych oraz może posłużyć do wykrycia obserwacji odstających. W celu zdefiniowania danych typowych i nietypowych można posłużyć się pojęciem głębi funkcjonalnej. Rozważmy funkcje losowe, takie jak zdefiniowano we wstępie. Jeżeli mamy próbę losową N funkcjonalnych obserwacji $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, to na początku porządkujemy je w porządku malejącym, bazując na wybranej głębi funkcjonalnej otrzymując zbiór postaci $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}\}$. W następnym kroku Sun, Genton (2011) definiują próbkowy obszar α -centralny, zawierający α % najbardziej centralnych obserwacji z próby:

$$C_\alpha(X) = \left\{ (t, z(t)) : \min_{l=1,2,\dots,[\alpha N]} X_l(t) \leq z(t) \leq \max_{r=1,2,\dots,[\alpha N]} X_r(t) \right\}. \quad (12)$$

Następnie, podobnie jak w przypadku klasycznego wykresu ramka-wąsy, obliczamy $C_{0.5}$, czyli obszar zawierający 50% najbardziej centralnych funkcji. Potem wybieramy pewien czynnik $F \geq 1$ celem powiększenia tego obszaru, by zawierał kolejne obserwacje. Ograniczeniem obszaru będą obwiednie funkcji całkowicie zawierające α % najbardziej centralnych obserwacji z próby (oczywiście teraz $\alpha < 0.5$). W ten sposób konstruujemy odpowiednik jednowymiarowego pudełka. Obserwacje, które przekraczają choćby dla jakiegoś podzbioru swojej dziedziny funkcje ograniczające, uznajemy za obserwacje odstające. W przypadku zwykłego jednowymiarowego wykresu ramka-wąsy, zwykle przyjmujemy $F=1.5$, co oznacza, że frakcja danych uznanych za obserwacje odstające wynosi około 69,8%.

Będziemy dalej rozważali ulepszony funkcjonalny wykres pudełkowy zaproponowany przez Suna, Gentona (2012), który umożliwi rozwiązanie problemu uodpornienia danych funkcjonalnych. W podejściu tym można kontrolować prawdopodobieństwo odrzucenia obserwacji nietypowych dla zbiorów danych mających rozkład gaussowski. Takie dopasowanie parametrów pozwala na traktowanie funkcjonalnego wykresu pudełkowego, nie tylko jako narzędzia służą-

cego do zobrazowania danych, ale także umożliwi wykrycie obserwacji odstających. Takie podejście ma jednak pewne wady, wypunktowane przez Tarabelloni (2017), który zaproponował udoskonalenie dotychczas stosowanej procedury. Zaproponował on mianowicie połączenie procedury dopasowywania parametrów wraz z wyznaczaniem naturalnego odpornego funkcjonalnego estymatora położenia i skali, co pomoże uzyskać odpowiednie narzędzie służące do uodpornienia danych funkcjonalnych. Przechodząc dalej do szczegółów, w artykule Suna, Gentona (2012) rozważano wybór odpowiedniej wartości F dla przypadku funkcjonalnego wykresu pudełkowego tak, aby tylko z góry wybrana frakcja najbardziej odstających krzywych zostaje uznana za obserwacje odstające albo odrzucona, wszystko to dla przypadku, kiedy dane generowane są przez odpowiedni proces gaussowski. Na tym kończą się analogie z przypadkiem jednowymiarowym, bowiem nie istnieje sposób na otrzymanie teoretycznej wartości F . Ponieważ dane funkcjonalne pochodzące z procesu gaussowskiego są bardziej złożone niż jednowymiarowe zmienne losowe o rozkładzie normalnym, to także procedura wyznaczania wartości F musi uwzględniać empiryczną funkcjonalną wartość oczekiwaną i funkcjonalną kowariancję badanego procesu. Innymi słowy będzie ona zależała od każdego rozpatrywanego zbioru danych funkcjonalnych. Podejście z pracy Suna, Gentona (2012) wymaga estymowania parametrów położenia i rozrzutu ze zbioru danych, by następnie przy ich pomocy utworzyć sztuczną populację funkcji o rozkładzie gaussowskim, która nie zawiera obserwacji odstających tak, aby optymalną wartość F można obliczyć numerycznie poprzez narzucenie odpowiedniego empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa. Niemniej trudno tę metodę zastosować w praktyce (patrz Tarabelloni, 2017).

Przechodząc do szczegółów, przed przeprowadzeniem symulacji rozkładu gaussowskiego, trzeba odpowiednio uodpornić zbiór danych funkcjonalnych. Sztuczna populacja powinna posiadać taką samą funkcjonalną wartość oczekiwaną i funkcjonalną kowariancję, jak początkowy zbiór danych. Są one jednak przecież nieznanne i także trzeba je wyestymować. Zwykle początkowo stosuje się dekompozycję Karhunen-Loèvego (patrz Loève, 1978):

$$X = \mu + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \sqrt{\lambda_i} \psi_i, \quad (13)$$

gdzie ψ_i to wektory własne, a λ_i wartości własne C – operatora kowariancji X , natomiast ξ_i to nieskorelowane, rzeczywiste zmienne losowe o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji równej jeden. Rzecz jasna, w zastosowaniach ograniczamy się do pierwszych K wartości własnych estymowanych dla rozpatrywanych danych funkcjonalnych i stąd odporny estymator rozrzutu powinien pozwolić na otrzymanie wartości własnych i wektorów własnych operatora kowariancji. Tarabelloni (2017) zauważył, że skorygowany wykres pudełkowy nie gwarantuje, że te estymatory wartości własnych i wektorów własnych operatora kowariancji X są wystarczająco

dobrze. Ponadto, są one zależne od rozkładu i mogą nie być operatorami dodatnio określonymi. Są estymatorami zgodnymi operatora kowariancji C tylko dla danych pochodzących z procesu gaussowskiego (patrz Sun, Genton, 2012). W zamian Tarabelloni (2017) proponuje dwojakie podejście do tego zagadnienia. Pierwsze podejście oznacza wyznaczenie empirycznego estymatora sferycznej kowariancji (ang. *spherical covariance estimator*, C_S). Można go interpretować jako rzutowanie X na sferę jednostkową, której środek stanowi mediana przestrzenna. C_S jest wtedy kowariancją danych rzutowanych na sferę jednostkową. Za pracą Gerviniego (2008) można użyć koncepcji sferycznej kowariancji w odpornej analizie składowych głównych dla danych funkcjonalnych, wykorzystując fakt posiadania przez C i C_S takich samych wektorów własnych oraz korzystając ze wzorów na zależności pomiędzy ich wartościami własnymi. Dlatego też Tarabelloni (2017) uważa, że wyznaczenie C_S stanowi sensowną, bardziej odporną alternatywę dla C .

Drugie podejście Tarabelloniego (2017) bazuje na koncepcji z pracy Krausa, Panaretosa (2012), którzy zaproponowali estymowanie rozrzutu poprzez estymator kowariancji mediany przestrzennej C_M . Przy odpowiednich założeniach C_M ma takie same wektory własne jak C , podobnie też tak jak w przypadku pierwszego podejścia, wartości własne C i C_M są powiązane skomplikowanymi zależnościami. Niemniej, ze względu na obiecujące własności spektralne i ze względu na odporność, zarówno sferyczna kowariancja jak i kowariancja mediany są używane do otrzymania skorygowanego funkcjonalnego wykresu pudełkowego. Używa się tych wielkości, tzn. C_S i C_M , by znaleźć wartości i wektory własne operatora C i by następnie utworzyć populację o rozkładzie gaussowskim służącą do wyznaczenia wartości F . W praktyce obliczenia wartości własnych sprowadzają się do rozwiązania wielu jednowymiarowych problemów estymowania parametrów skali. Do tego celu użyć można mediany wartości bezwzględnej odchyłeń od mediany (ang. *Median Absolute Deviation*, *MAD*) albo wprowadzonych w pracy Rosseeuw, Croux (1993) estymatorów S_N i Q_N . Zdefiniowane są one następująco:

$$MAD(x_1, x_2, \dots, x_N) = b \cdot \text{med}\{|x_i - \text{med}(x_1, x_2, \dots, x_N)|\}, \quad (14)$$

$$S_N = c \cdot \text{med}_{i=1, \dots, N}\{\text{med}_{j=1, \dots, N}|x_i - x_j|\}, \quad (15)$$

gdzie stałe parametry $b > 0$ albo $c > 0$ wybiera się tak, by uzyskać zgodny w sensie Fishera estymator rozrzutu. Innym, odpornym estymatorem rozrzutu, jest

$$Q_N = d \cdot \{ |x_i - x_j|, i < j \}_{(k)}, \text{ gdzie } k = \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1 \right), \quad (16)$$

równe w przybliżeniu kwantylowi rzędu 0,25 różnic par obserwacji, pomnożonych przez pewną stałą $d > 0$, wybraną tak, by uzyskać zgodny w sensie Fishera estymator rozrzutu.

Rousseeuw, Croux (1993) doradzali zastosowanie Q_N jako, że jego punkt załamania próby skończonej wynosi 50% i ma asymptotyczną efektywność równą około 88,27% dla rozkładów gaussowskich. Wybranie w procedurze obliczania F , błędnej wartości parametru d skutkuje wyborem błędnego operatora kowariancji i nieprawidłowym wykresem pudełkowym. Wyjściem z sytuacji jest wybór, w celu utworzenia rang obserwacji, głębi funkcjonalnej niezmienniczej ze względu na parametr przesunięcia i skali. Wybrana przez nas MBD spełnia ten warunek (por. np. Nagy i inni, 2016). Ostatecznie Tarabelloni (2017) używa modelu

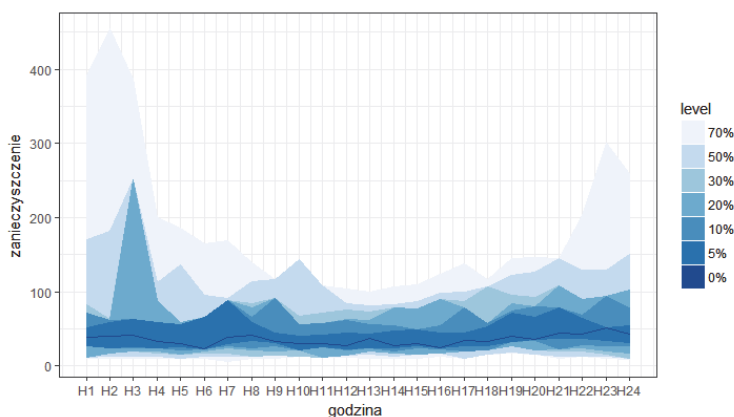
$$Y_i^* = \frac{Y_i - \mu_x}{\sqrt{\lambda_1}} \mu = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_1}} \xi_{i,j} \psi, \quad (17)$$

gdzie $\xi_{i,j}$ to niezależne zmienne losowe o standardowym rozkładzie normalnym. Zamiast średniej μ_x rozważa przestrzenną medianę X jako parametr położenia.

W taki sposób otrzymujemy wartość F . Ponadto iloraz $\sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_1}}$ można w prosty sposób estymować korzystając z własności Q_N . W rezultacie Tarabelloni (2017) otrzymuje estymatory wektorów własnych i wartości własnych macierzy kowariancji, które następnie służą do wygenerowania sztucznej gaussowskiej populacji, która z kolei posłuży do wyznaczenia spójnej i niezależnej od rozkładu wartości F . Zastosowanie sferycznej kowariancji bądź kowariancji mediany wraz z Q_N powoduje, że estymator jest bardziej odporny.

Na rysunku 1 przedstawiamy przykładowy funkcjonalny wykres pudełkowy utworzony z wykorzystaniem zmodyfikowanej głębi pasma (MBD). Pokazuje on zanieczyszczenie powietrza pyłem PM10 w Katowicach w analizowanym przez nas okresie czasu, tj. od 1 września 2016 r. do 28 lutego 2017 r.

Rysunek 1. Funkcjonalny wykres pudełkowy utworzony z wykorzystaniem zmodyfikowanej głębi pasma (MBD) obrazujący zanieczyszczenie powietrza pyłem PM10 w Katowicach w $\mu\text{g}/\text{m}^3$ w analizowanym okresie

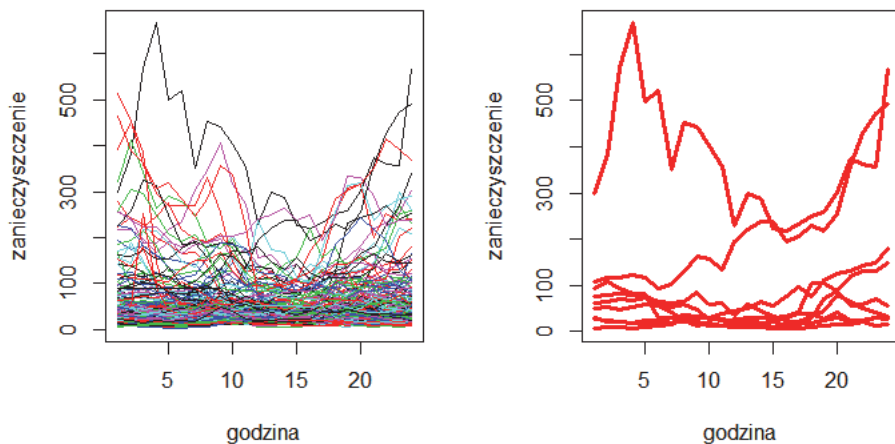


5. MONITOROWANIE JAKOŚCI POWIETRZA W KATOWICACH I KRAKOWIE

Na zanieczyszczenie powietrza składają się emisje różnego rodzaju związków, są to min. dwutlenek siarki, dwutlenek azotu, ozon, tlenek węgla, benzen, tlenki azotu, pył zawieszony PM_{2,5} oraz pył zawieszony PM₁₀ – czyli wszystkie cząstki o wielkości 10 mikrometrów lub mniejszej. Smog ma ujemny wpływ na zdrowie mieszkańców, innymi słowy generuje koszty społeczne i zdrowotne. W celu monitorowania zanieczyszczenia powietrza dokonuje się pomiarów stężenia pewnych związków chemicznych w powietrzu. Pomiarów dokonuje się wyłącznie w pewnej liczbie stacji rozmieszczonych, zwykle nierównomiernie, na pewnym obszarze. W analizowanym przez nas przypadku są to województwo śląskie i małopolskie, gdzie Wojewódzkie Inspektoraty Ochrony Środowiska w Katowicach i Krakowie (WIOŚ) umieszczają na stronach internetowych <http://powietrze.katowice.wios.gov.pl> oraz <http://www.krakow.pios.gov.pl> dane ze stacji pomiarowych z terenu swojego województwa. Prezentowane są tam wyniki automatycznych pomiarów jakości powietrza, są one przekazywane bezpośrednio ze stacji pomiarowych i nie są zweryfikowane. Zaznaczmy za WIOŚ, że wyniki te są poddawane okresowej weryfikacji i mogą ulec zmianie. Analizowaliśmy stężenie w powietrzu pyłu zawieszonego PM₁₀ w Katowicach (stacja przy ul. Kossutha). Dane pochodzą z okresu 181 dni od 1 września 2016 r. do 28 lutego 2017 r. Analizujemy 181 krzywych pokazujących, jak zmienia się stężenie w powietrzu pyłu zawieszonego PM₁₀. Analizowaliśmy też dane pokazujące zanieczyszczenie powietrza w Krakowa z grudnia 2016 r. czterema rodzajami substancji: tlenkiem azotu (NO), tlenkami azotu (NO_x), pyłem zawieszonym PM_{2,5} oraz pyłem zawieszonym PM₁₀.

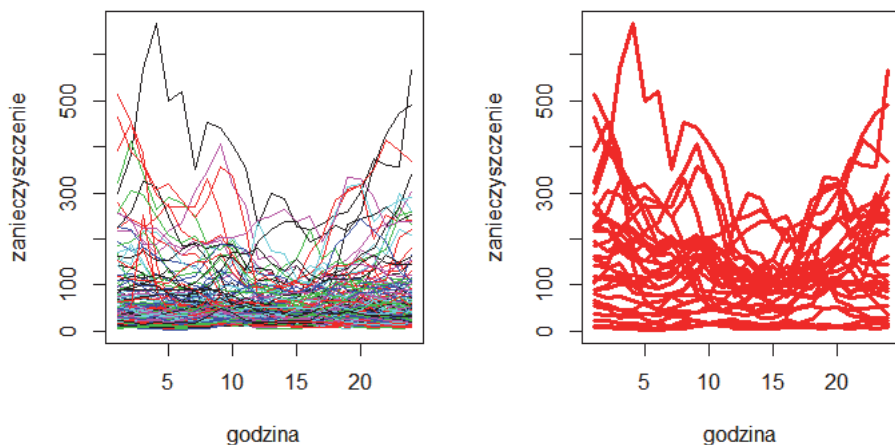
Patrzymy na funkcje losowe obserwowane w regularnych odstępach czasu jak na funkcjonalne szeregi czasowe. Można też konstruować funkcjonalne szeregi czasowe poprzez rozdzielenie ciągłego przedziału czasowego na naturalne części tzn. godziny, dni, tygodnie, miesiące, lata. Na kolejnych rysunkach znajdują się funkcjonalne obserwacje pokazujące zanieczyszczenie powietrza pyłem PM₁₀ w Katowicach. Rysunek 2 przedstawia skorygowany funkcjonalny wykres pudełkowy pokazujący zanieczyszczenie powietrza pyłem PM₁₀ w Katowicach w $\mu\text{g}/\text{m}^3$. Wyróżniono obserwacje odstające ze względu na amplitudę. Rysunek 3 przedstawia po lewej obserwacje funkcjonalne obrazujące zanieczyszczenie powietrza pyłem PM₁₀ w Katowicach w $\mu\text{g}/\text{m}^3$. Po prawej wykres wartości odstających, na którym wyróżniono obserwacje funkcjonalne odstające ze względu na kształt, ponadto wskazano numery takich obserwacji. Funkcjonalne obserwacje odstające ze względu na kształt zostały zestawione na rysunku 4, gdzie prezentujemy je na tle wszystkich obserwacji. Funkcjonalny wykres pudełkowy umożliwił nam wykrycie obserwacji odstających ze względu na amplitudę (wielkość). Zostały one zestawione na rysunku 5, gdzie prezentujemy je na tle wszystkich obserwacji pokazujących zanieczyszczenie powietrza pyłem PM₁₀ w Katowicach. Rysunek 6 przedstawia zanieczyszczenie powietrza

Rysunek 4. Po lewej obserwacje funkcjonalne obrazujące zanieczyszczenie powietrza pyłem PM10 w Katowicach w $\mu\text{g}/\text{m}^3$. Po prawej obserwacje funkcjonalne odstające co do kształtu



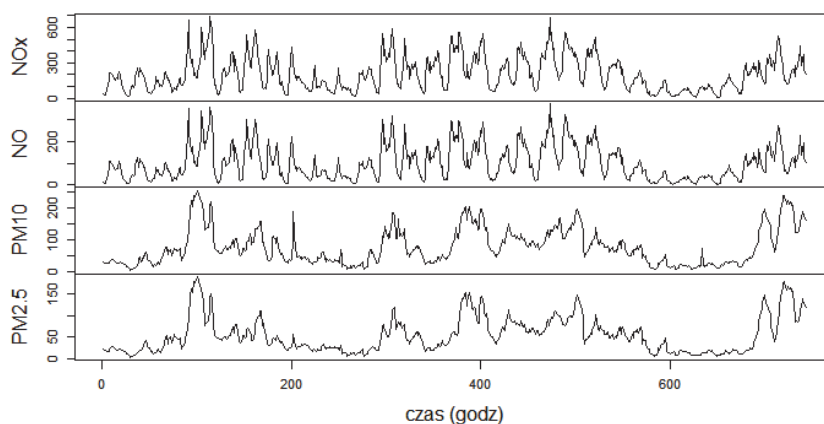
Źródło: opracowanie własne. Użyto pakietu *DepthProc*.

Rysunek 5. Po lewej obserwacje funkcjonalne obrazujące zanieczyszczenie powietrza pyłem PM10 w Katowicach w $\mu\text{g}/\text{m}^3$. Po prawej obserwacje funkcjonalne odstające co do amplitudy (wielkości)



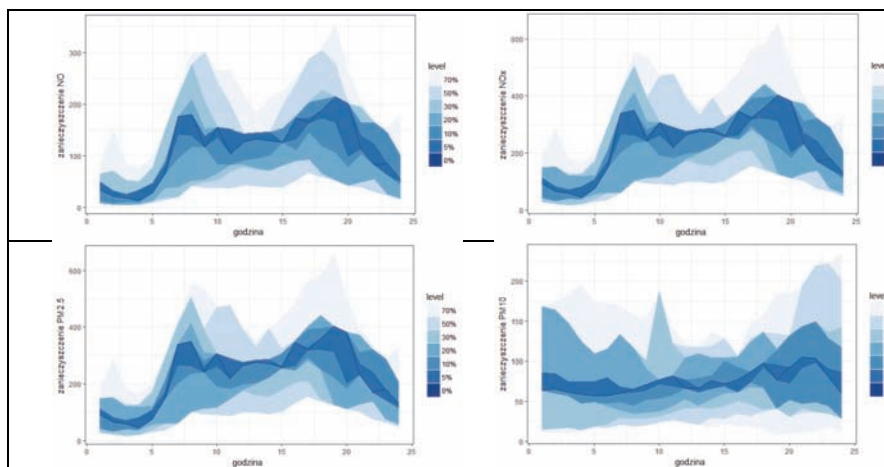
Źródło: opracowanie własne. Użyto pakietu *DepthProc*.

Rysunek 6. Zanieczyszczenie powietrza w Krakowie czterema wybranymi substancjami w $\mu\text{g}/\text{m}^3$ w dniach od 1.12.2016 do 31.12.2016 r.”



Źródło: opracowanie własne. Użyto pakietu *DepthProc*.

Rysunek 7. Funkcjonalne wykresy pudełkowe utworzone z wykorzystaniem zmodyfikowanej głębi pasma (MBD) obrazujące zanieczyszczenie powietrza tlenkiem azotu (NO), tlenkami azotu (NOx), pyłem PM2,5 i pyłem PM10 w Krakowie w $\mu\text{g}/\text{m}^3$ w grudniu 2016 r.



Źródło: opracowanie własne. Użyto pakietu *DepthProc*.

Podsumowując, w pracy zaprezentowano metodykę wykrywania funkcjonalnych obserwacji odstających ze względu na kształt oraz na amplitudę oraz przedstawiono jej użyteczność empiryczną na przykładach dotyczących monitorowania zanieczyszczenia powietrza w Katowicach i Krakowie. Należy podkreślić, że znane metody wnioskowania statystycznego stosowane w obrębie FDA na ogół krytycznie zależą od występowania pośród danych obserwacji odstają-

cych. Zaprezentowane metody wraz z ich implementacjami w darmowych pakietach środowiska R „uodparniają” metody wnioskowania i co za tym idzie prowadzą do bardziej miarodajnych wniosków merytorycznych. Taka wiedza merytoryczna umożliwi decydom optymalizację polityki miejskiej i regionalnej w zakresie ochrony powietrza. Wykorzystywane w pracy metody i zbiory danych dostępne są w pakiecie *DepthProc*.

LITERATURA

- Arribas-Gil A., Romo J., (2014), Shape Outlier Detection and Visualization for Functional Data: the Outliergram, *Biostatistics*, 15 (4), 603–619.
- Cuevas A., Febrero M., Fraiman R., (2006), On the Use of the Bootstrap for Estimating Functions with Functional Data, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 (2), 1063–1074.
- Febrero-Bande M. O., de la Fuente M., (2012), Statistical Computing in Functional Data Analysis: The R Package *fda.usc*, *Journal of Statistical Software*, 51 (4), 1–28.
- Fraiman R., Muniz G., (2001), Trimmed Means for Functional Data, *Test*, 10 (2), 419–440.
- Gervini D., (2008), Robust Functional Estimation Using the Median and Spherical Principal Components, *Biometrika*, 95 (3), 587–600.
- Gijbels I., Nagy S., (2015), Consistency of Non-Integrated Depths for Functional Data, *Journal of Multivariate Analysis*, 140, 259–282.
- Górecki T., Krzyśko M., Waszak Ł., Wołyński W., (2014), Methods of Reducing Dimension for Functional Data, *Statistics in Transition*, 15 (2), 231–242.
- Górecki T., Krzyśko M., Waszak Ł., Wołyński W., (2018), Selected Statistical Methods of Data Analysis for Multivariate Functional Data, *Statistical Papers*, 59 (1), 153–182.
- Horváth L., Kokoszka P., (2012), *Inference for Functional Data with Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Hubert M., Rousseeuw P., Segaert, P., (2015), Multivariate Functional Outlier Detection, *Statistical Methods and Applications*, 24 (2), 177–202.
- Ieva F., Paganoni A. M., (2016), A Taxonomy of Outlier Detection Methods for Robust Classification in Multivariate Functional Data. Technical Report 15/2016, MOX – Modeling and Scientific Computing Laboratory.
- Kosiorowski D., (2012), *Statystyczne Funkcje Głębi w Odpornej Analizie Ekonomicznej*, Wydawnictwo UEK w Krakowie, Kraków.
- Kosiorowski D., (2016), Dilemmas of robust analysis of economic data streams, *Journal of Mathematical Sciences* (Springer), 218 (2), 167–181.
- Kosiorowski D., Rydlewski, J. P., Snarska M., (2017) Detecting a Structural Change in Functional Time Series Using Local Wilcoxon Statistic, *Statistical Papers*, DOI 10.1007/s00362-017-0891-y.
- Kosiorowski D., Zawadzki, Z. (2014) *DepthProc* An R Package for Robust Exploration of Multidimensional Economic Phenomena, arXiv preprint arXiv:1408.4542.
- Kraus D., Panaretos V. M., (2012), Dispersion Operators and Resistant Second-Order Functional Data Analysis, *Biometrika*, 99 (4), 813–832.
- Liu R. Y., (1990), On a Notion of Data Depth Based on Random Simplices, *The Annals of Statistics*, 18 (1), 405–414.

- Liu R. Y., Parelius J., Singh K., (1999), Multivariate Analysis by Data Depth: Descriptive Statistics, Graphics and Inference. *The Annals of Statistics*, 27 (3), 783–858.
- Liu R. Y., Singh K., (1993), A Quality Index Based on Data Depth and Multivariate Rank Tests, *Journal of the American Statistical Association*, 88 (421), 252–260.
- Loève M., (1978), *Probability Theory*. Springer-Verlag, New York.
- López-Pintado S., Jörnsten R., (2007), Functional Analysis via Extensions of the Band Depth, w: Liu R., Strawderman W., Zhang C. H., (red.), *Complex Datasets and Inverse Problems: Tomography, Networks and Beyond*, 54,103–120, Institute of Mathematical Statistics, IMS Lecture Notes – Monograph Series.
- López-Pintado S., Romo J., (2007), Depth-Based Inference for Functional Data, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 (10), 4957–4968.
- López-Pintado S., Romo J., (2009), On the Concept of Depth for Functional Data, *Journal of the American Statistical Association*, 104 (486), 718–734.
- Martin-Barragan B., Lillo R. E., Romo J., (2015), Functional Boxplots Based on Epigraphs and Hypographs, *Journal of Applied Statistics*, 43 (6), 1088–1103.
- Mosler K., (2013), Depth Statistics, w: Becker C., Fried R., Kuhnt S., (red.), *Robustness and Complex Data Structures*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 17–34.
- Mosler K., Polyakova Y., (2016), General Notions of Depth for Functional Data, *arXiv*: 1208.1981v2.
- Nagy S., Gijbels I., Omelka M., Hlubinka D., (2016), Integrated Depth for Functional Data: Statistical Properties and Consistency, *ESIAM Probability and Statistics*, 20, 95–130.
- Nieto-Reyes A., Battey H., (2016), A Topologically Valid Definition of Depth for Functional Data, *Statistical Science*, 31 (1), 61–79,
- Ramsay J. O., Hooker G., Graves S., (2009), *Functional Data Analysis with R and Matlab*, Springer – Verlag, New York.
- Rousseeuw P. J., Croux C., (1993), Alternatives to the Median Absolute Deviation, *Journal of the American Statistical Association*, 88 (424), 1273–1283.
- Sun Y., Genton M., (2011), Functional Boxplots, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20 (2), 316–334.
- Sun Y., Genton M., (2012), Adjusted Functional Boxplots for Spatio-Temporal Data Visualization and Outlier Detection, *Environmetrics*, 23 (1), 53–64.
- Szlachtowska E., (2017), Odporna analiza skupisk w badaniach nowej ekonomii, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie.
- Tarabelloni N., (2017), *Robust Statistical Methods in Functional Data Analysis*, Rozprawa doktorska, Politecnico di Milano.
- Tukey J., (1975), Mathematics and the Picturing of Data, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver*, 2, 523–531.
- Zuo Y., Serfling R., (2000a), General Notions of Statistical Depth Function, *The Annals of Statistics*, 28 (2), 461–482.
- Zuo Y., Serfling R., (2000b), Structural Properties and Convergence Results for Contours of Sample Statistical Depth Functions, *The Annals of Statistics*, 28 (2), 483–499.

Źródła internetowe:

<http://powietrze.katowice.wios.gov.pl> (data dostępu: 24 marca 2017 r.)

<http://www.krakow.pios.gov.pl> (data dostępu: 25 marca 2017 r.)

WYKRYWANIE FUNKCJONALNYCH OBSERWACJI ODSTAJĄCYCH NA PRZYKŁADZIE MONITOROWANIA JAKOŚCI POWIETRZA

Streszczenie

W pracy omówiono sposoby wykrywania obserwacji odstających w zbiorach danych funkcjonalnych. Omówiono mianowicie funkcjonalne obserwacje odstające ze względu na kształt i ze względu na amplitudę. Zdefiniowano wykres wartości odstających, służący do wykrywania funkcjonalnych obserwacji odstających ze względu na kształt. Omówiono też skorygowany funkcjonalny wykres pudełkowy służący do wykrywania funkcjonalnych obserwacji odstających ze względu na amplitudę. Elementy statystycznej analizy służącej do wykrywania obserwacji odstających zobrazowano na przykładzie danych pokazujących zanieczyszczenie powietrza w Katowicach oraz w Krakowie wybranymi czterema rodzajami substancji.

Słowa kluczowe: funkcjonalne obserwacje odstające, wykrywanie funkcjonalnych obserwacji odstających, statystyka odporna, głębia funkcjonalna, analiza zanieczyszczenia powietrza

FUNCTIONAL OUTLIERS DETECTION BY THE EXAMPLE OF AIR QUALITY MONITORING

Abstract

Methods of functional outliers detection in functional setting have been discussed, i.e. shape outliers and magnitude outliers. Outliergram has been discussed, a tool for functional shape outliers detection. Robust adjusted functional boxplot has been discussed as well, a tool for functional magnitude outliers detection. „The elements of functional outliers analysis have been applied to air pollution data for Katowice and Kraków.”

Keywords: functional outliers, functional outliers detection, robust statistics, functional depth, air pollution analysis

Ivan TELEGA¹

Czynniki zapotrzebowania materiałowego w krajach UE w latach 2000–2015

1. WSTĘP

Trwałość rozwoju², w tym także wzrostu gospodarczego w dużej mierze zależy od dostępności zasobów odnawialnych oraz nieodnawialnych. Jednocześnie, korzystanie z zasobów naturalnych jest istotnym czynnikiem degradacji środowiska naturalnego oraz utraty bioróżnorodności. Wpływ na środowisko jest wywierany zarówno na etapie wydobywania zasobów, przekształcania oraz obróbki, jak również na etapie utylizacji zużytych dóbr w postaci emisji oraz odpadów. Problem ten znajduje odzwierciedlenie w dokumentach strategicznych UE, m.in. strategii Europa 2020, w której jedną z inicjatyw przewodnich jest „Europa efektywnie korzystająca z zasobów”³. Przyjęto również Plan działania na rzecz zasobooszczędnej Europy (ang. *The Roadmap to a Resource Efficient Europe*), w którym nadrzędnym celem jest wzrost efektywności wykorzystania zasobów oraz oddzielenie wzrostu gospodarczego od wykorzystywania zasobów, inaczej mówiąc – dematerializacja gospodarki. Szacuje się, że do 2050 r. należy zwiększyć efektywność wykorzystania zasobów 4 do 10 razy (Komisja Europejska 2011, s. 2). Realizacja tak podstawionych celów wymaga określenia czynników determinujących wielkość zużycia zasobów w poszczególnych krajach.

W dotychczasowych pracach (Steinberger i inni, 2010; Wiedmann i inni, 2013) analizowano wpływ wybranych czynników (m.in. PKB, wielkość populacji, powierzchnia, gęstość zaludnienia) na wielkość zapotrzebowania materiałowego wykorzystując dane przekrojowe. W pracy Bringezu i inni (2004) wykorzystującej dane panelowe ograniczono się do analizy zależności pomiędzy DMI a PKB. Jak dotąd, jedynie Steger, Bleischwitz (2011) wykorzystali szerszy zestaw zmiennych objaśniających w układzie panelowych dla krajów EU-15 w latach 1980–2000 oraz EU-27 w latach 1992–2000.

¹ Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Finansów i Prawa, Katedra Matematyki, ul. Rakowicka 27, 31–510 Kraków, Polska, e-mail: ivan.telega@uek.krakow.pl.

² Angielski termin *sustainable development* jest różnie tłumaczony na j. polski, m.in. jako rozwój zrównoważony oraz rozwój trwały. Zdaniem autora, najlepiej znaczenie oryginału wyraża określenie rozwój trwały. Podobnie, angielskie *sustainability* może być tłumaczone jako trwałość.

³ <http://ec.europa.eu/resource-efficient-europe>.

Celem opracowania jest określenie wpływu wybranych czynników o charakterze społeczno-ekonomicznym na ilość zużywanych zasobów w wybranych krajach Europy z wykorzystaniem klasycznych modeli regresji panelowej (z efektami stałymi). Ze względu na dostępność danych badanie ograniczono do lat 2000–2015 oraz 26 krajów Europy⁴. Również dobór zmiennych objaśniających, istotnych w świetle teorii, został ograniczony dostępnością odpowiednich szeregów czasowych dla wybranej grupy krajów.

Praca jest kontynuacją badań Steger, Bleischwitz (2011). Wartość dodana pracy polega na wykorzystaniu danych panelowych o charakterze społeczno-ekonomicznym do wyjaśnienia wielkości zapotrzebowania materiałowego w latach 2000–2015. Identyfikowane czynniki mogą być przedmiotem stosownej polityki zmniejszenia materiałochłonności gospodarek.

2. RACHUNEK PRZEPIŹYWÓW MATERIAŁOWYCH – ZARYS METODYKI

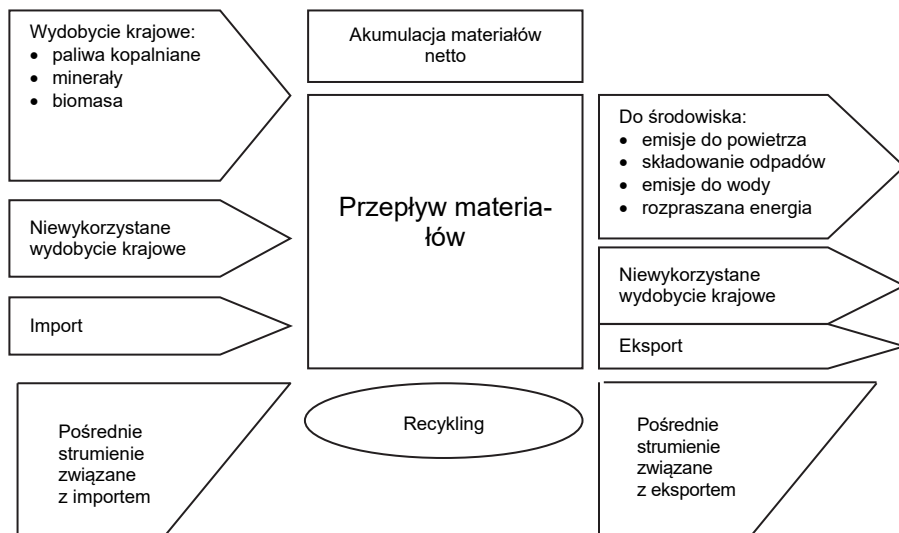
Rachunek przepływów materiałowych (ang. *Material Flow Accounts – MFA*) jest oparty na koncepcji gospodarczego metabolizmu (ang. *metabolism of economy*). Funkcjonowanie systemu społeczno-gospodarczego, postrzegane jako część (subsystem) biosfery, charakteryzuje się pobieraniem, transformacją, przechowywaniem, recyklingiem oraz wydalaniem materiałów (Bringezu i inni, 2003, s. 44). Metodologia analizy przepływów materiałowych gospodarki (ang. *Economy-Wide Materials Flow Analysis*) powstała w celu lepszego opisu tych procesów⁵. Podstawową zasadą jest systematyczna ewidencja wszystkich przepływów materiałowych (z wyjątkiem wody oraz powietrza) zachodzących na granicy dwóch systemów – środowiska naturalnego i gospodarki, jak również ewidencji przepływów pomiędzy granicami poszczególnych krajów. Ogólny schemat materiałowego bilansu gospodarki przedstawiono na rysunku 1.

Historia MFA, podstawowe definicje oraz kluczowe założenia metodologiczne są omówione przez M. Fischer-Kowalski i inni (2011). Autorzy zauważają, że metodologia MFA oraz generowane na jej podstawie dane osiągnęły stan dojrzałości, gwarantujący, że wskaźniki przepływu materiałów mogą być uzupełnieniem tradycyjnych wskaźników ekonomicznych i demograficznych w dyskusji na temat krajowych i międzynarodowych strategii na rzecz zrównoważonego wykorzystania zasobów. Spójność dostępnych danych umożliwi również prowadzenie badań empirycznych nad różnymi aspektami gospodarki zasobami, w tym wywieranej presji na środowisko naturalne, zużyciem energii, gospodarką gruntami etc.

⁴ Warto zauważyć, że w sposób istotny ogranicza to uniwersalność formułowanych wniosków.

⁵ Metoda została opracowana przez Instytut ds. Energii, Klimatu i Środowiska w Wuppertalu (<http://wupperinst.org>), a następnie usystematyzowana oraz ujednolicona przez Eurostat (Eurostat, 2001). Prace badawcze wykorzystujące metodykę rachunków przepływów materiałowych były prowadzone także w Polsce (por. Schutz, Śleszyński, 2000; Świerkula, 2006).

Rysunek 1. Schemat materiałowego bilansu gospodarki



Źródło: Eurostat, 2001, s. 16.

Na podstawie kategorii przepływów materiałowych identyfikowanych w ramach rachunków MFA tworzy się wskaźniki, których celem jest przedstawienie gospodarczego metabolizmu w sposób zagregowany. W grupie wskaźników nakładów m.in. wyróżnia się (Eurostat, 2001, s. 35):

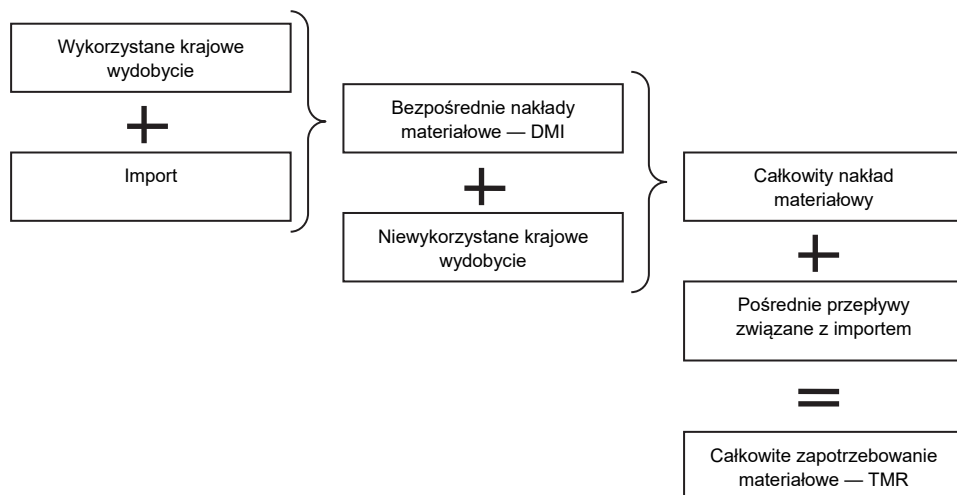
1. Bezpośrednie nakłady materiałowe (ang. *Direct Material Input – DMI*) – obejmują bezpośredni strumień materiałów, który fizycznie wchodzi do gospodarczego systemu jako nakład w celu dalszego przetwarzania w gospodarce, to znaczy wszystkie materiały, które mają wartość rynkową i są wykorzystane w procesie produkcji i konsumpcji. W rachunku przepływów materiałowych DMI równa się sumie masy wykorzystanego krajowego wydobycia (ang. *used domestic extraction*) i importu. Po odjęciu eksportu otrzymuje się wskaźnik krajowej konsumpcji materiałów (ang. *domestic material consumption – DMC*)
2. Całkowite zapotrzebowanie materiałowe (ang. *Total material requirement – TMR*) – mierzy całkowitą masę materiałów potrzebnych do podtrzymania systemu gospodarczego, zarówno te wykorzystane w procesie produkcji i konsumpcji, jak i te niewykorzystane, bez względu na pochodzenie materiałów (krajowe czy z reszty świata). W rachunku przepływów materiałowych TMR obejmuje całkowite krajowe wydobycie (wykorzystane i niewykorzystane⁶) oraz import wraz z nakładami pośrednimi związanymi z impor-

⁶ Niewykorzystane krajowe wydobycie (ang. *unused domestic extraction*) obejmuje materiały wydobyte lub przemieszczone na terytorium kraju ze względu na stosowane technologie, które nie są przeznaczone do wykorzystania, np. niewykorzystana część wydobycia górnictwa i odkrywkowego.

tem⁷. Schemat wskaźników nakładów materiałowych przedstawiono na rysunku 2.

Perspektywa materiałowa pozwala na ocenę wielu problemów istotnych z punktu widzenia trwałości rozwoju. Obecny stan wiedzy nie pozwala na precyzyjne określenie tzw. progów krytycznych pojemności środowiska naturalnego względem powstających odpadów i zanieczyszczeń, jednak z dużą pewnością można stwierdzić, że ilość wykorzystywanych materiałów determinuje skalę niszczenia ekosystemów. Ryzyko bezpośrednich oraz pośrednich szkód w środowisku prawdopodobnie wzrasta wraz z ilością pozyskiwanych pierwotnych materiałów. Różne materiały charakteryzują się różną szkodliwością, tym niemniej wskaźniki MFA w sposób zagregowany opisują fizyczny wymiar gospodarki oraz pośrednio informują o skali wywieranej antropopresji. Zauważa się, że wiele negatywnych oddziaływań na środowisko, np. zużycie wody, utrata bioróżnorodności, erozja gleb etc. ma swoje przyczyny na poszczególnych etapach wydobycia, obróbki oraz transportu surowców i materiałów.

Rysunek 2. Wskaźniki zapotrzebowania materiałowego



Źródło: Eurostat, 2001.

Wskaźniki zapotrzebowania materiałowego mają charakter wskaźników o charakterze ostrzegawczym. Nakłady materiałowe mogą być traktowane jako ilościowy wyraz deprecjacji kapitału naturalnego. Ograniczenie strumieni materiałowych oznacza zachowanie kapitału naturalnego (Hinterberger i inni, 1997, s. 5). Użycie takiego makro wskaźnika także pozwala na sformułowanie kon-

⁷ Pośrednie przepływy związane z importem (ang. *indirect flows associated to imports*): ekwiwalent importowanych dóbr wyrażony w surowcach (minus masa importowanego produktu), niewykorzystane wydobycie związane z importowanymi surowcami i produktami.

kretnego celu zapewniającego trwałość. Zdaniem wielu badaczy, produktywność wykorzystania zasobów w krajach rozwiniętych powinna wzrosnąć 10 krotnie (Hinterberger i inni, 1997, s. 12). Obecna wiedza nie pozwala na ustalenie trwałego (ang. *sustainable*) poziomu TMR. Jednakże, przyjęcie wzorców krajów uprzemysłowionych przez całą ziemską populację oznaczałoby 2- do 5-krotny wzrost globalnych przepływów zasobów. Tym bardziej istotne jest określenie czynników determinujących zapotrzebowanie materiałowe krajów. Możliwych jest kilka podejść (Pothen, Schymura, 2015, s. 110):

- analiza dekompozycji wskaźnika,
- analiza dekompozycji struktury,
- analiza ekonometryczna czynników.

W pracy wykorzystuje się trzecie podejście. Czynniki (ang. *drivers*) są rozumiane szeroko – mogą one wpływać na ilość zużywanych zasobów w sposób pośredni lub bezpośredni, przy czym kierunek wpływu nie jest określony. Mogą one mieć charakter zewnętrzny (np. realizowane polityki) lub wewnętrzny, jak np. czynniki determinujące sposób zachowania (Steger, Bleischwitz, 2011, s. 818). Można wyróżnić następujące typy (grupy) takich czynników:

1. Postęp technologiczny – wzrost produktywności pozwala na wytworzenie tej samej liczby produktów i usług przy niższym zużyciu zasobów. Możliwa jest również substytucja zasobów rzadkich lub szkodliwych przez zasoby bardziej „ekologiczne”, aczkolwiek ogólny wpływ postępu technicznego na zapotrzebowanie materiałowe może mieć różny charakter (zależny także od branży, rodzaju materiału etc.).
2. Zmiany strukturalne – zwiększenie udziału sektora usług, jak również branż nowych technologii (IT) może prowadzić do zmniejszenia zapotrzebowania na zasoby w przeliczeniu na jednostkę PKB. Przeciwnie, wysoki udział materiałochłonnych sektorów (np. przemysł, budownictwo) zwiększa zapotrzebowanie na zasoby.
3. Zapotrzebowanie na inwestycje infrastrukturalne – nasycenie infrastrukturą w miarę rozwoju gospodarczego kraju może prowadzić do zmniejszenia zapotrzebowania na zasoby budowlane. Jednocześnie, utrzymanie istniejącej infrastruktury również wymaga zużycia zasobów.
4. Regulacje środowiskowe oraz wzorce zachowań – wyższa świadomość ekologiczna oraz ostrzejsze regulacje środowiskowe w krajach rozwiniętych mogą powodować przeniesienie „brudnych” przemysłów do krajów rozwijających się.
5. Czynniki związane z dostępnością zasobów, klimatem, topografią, demografią (również gęstość zaludnienia), na które w relatywnie krótkim okresie mamy tylko nieznaczny wpływ.

W każdej z wymienionych grup można próbować wyodrębnić czynniki mające określony (teoretycznie) wpływ na zapotrzebowanie materiałowe kraju, który następnie jest badany statystycznie. Istotna jest jednak dostępność odpowiednich danych (wskaźników).

W chwili przygotowywania niniejszej pracy wskaźniki DMI oraz DMC⁸ były dostępne w bazie Eurostat dla grupy krajów dla lat 2000–2015. Umożliwiło to przeprowadzenie analiz panelowych.

Wskaźnik TMR nie jest liczony przez Eurostat ze względu na ograniczoną dostępność danych, przede wszystkim dotyczących nakładów pośrednich związanych z importem. Wartość całkowitego zapotrzebowania materiałowego była szacowana dla poszczególnych krajów przez różne instytucje (Parlament Europejski, 2012, s. 58–61). Dostępne jest oszacowanie wartości TMR dla krajów Unii Europejskiej dla lat 2000–2007 wykonane w ramach raportu wykonanego na zlecenie Komisji Europejskiej (Meye, 2011).

3. CZYNNIKI KSZTAŁTOWANIA SIĘ ZAPOTRZEBOWANIA MATERIAŁOWEGO W WYBRANYCH KRAJACH W ŚWIETLE DOTYCHCZASOWYCH BADAŃ

Choć wielkość gospodarki (mierzona PKB) jest istotnym czynnikiem determinującym wielkość zapotrzebowania materiałowego, obserwowane jest spore zróżnicowanie wskaźników w krajach o podobnym poziomie rozwoju gospodarczego. Wielkość DMC na mieszkańca w wybranych krajach przedstawiono w tabeli 1. Dane są zgodne z wynikami dotychczasowych badań, według których wskaźniki zapotrzebowania materiałowego na mieszkańca w krajach UE różnią się kilkakrotnie. Jednocześnie wskazuje się, że wskaźniki PKB oraz zużycia energii nie wyjaśniają w pełni obserwowanych różnic (Weisz i inni, 2006, s. 676–698; Bringezu i inni, 2004, s. 97–124). Również kierunek zmian nie jest jednoznaczny. Obserwowany jest zarówno wzrost DMC na mieszkańca (przeważnie kraje Europy Środkowo Wschodniej oraz kraje skandynawskie), jak i spadek. Niewykluczone jednak, że wpływ na spadek zapotrzebowania materiałowego mógł mieć kryzys 2007 roku.

Tabela 1. DMC NA MIESZKAŃCA W WYBRANYCH KRAJACH W ROKU 2000 ORAZ 2013 R.
W TONACH

Kraj	2000	2013	2013–2000	Kraj	2000	2013	2013–2000
UE-28	15,476	13,078	–2,398	Litwa	8,336	15,669	7,333
Belgia	14,928	13,639	–1,289	Węgry	12,044	10,003	–2,041
Bułgaria	12,353	17,562	5,209	Holandia	12,732	10,077	–2,655
Czechy	17,835	14,744	–3,091	Austria	23,098	21,621	–1,477
Dania	23,576	20,197	–3,379	Polska	14,094	17,271	3,177
Niemcy	17,695	16,343	–1,352	Portugalia	19,48	13,948	–5,532
Estonia	12,445	28,747	16,302	Rumunia	7,684	22,056	14,372
Irlandia	34,177	22,233	–11,944	Słowenia	17,185	12,194	–4,991
Grecja	14,189	12,299	–1,890	Słowacja	10,072	11,367	1,295
Hiszpania	17,007	8,438	–8,569	Finlandia	33,73	33,842	0,112
Francja	14,55	11,946	–2,604	Szwecja	20,179	22,655	2,476
Chorwacja	7,515	9,951	2,436	Wielka Brytania	12,542	8,888	–3,654
Włochy	16,65	8,124	–8,526	Norwegia	b.d.	28,951	b.d.
Cypr	24,314	13,951	–10,363	Szwajcaria	12,534	12,1	–0,434
Łotwa	14,643	20,75	6,107	Turcja	9,537	11,896	2,359

Źródło: Eurostat.

⁸ DMI pomniejszony o eksport.

Krausmann i inni (2009) badali kształtowanie się zapotrzebowania materiałowego w skali globalnej w latach 1990–2005 w zestawieniu z PKB oraz danymi demograficznymi. W badanym okresie całkowite wydobycie zasobów wzrosło ośmiokrotnie (Krausmann i inni, 2009, s. 2699). Autorzy wskazują również na to, że wzrost produktywności wykorzystania zasobów (mierzonej za pomocą PKB/DMC) w dużej mierze wynika ze spowolnienia wzrostu wykorzystania biomasy, natomiast w przypadku pozostałych materiałów (np. minerałów) wzrost produktywności jest bardzo umiarkowany (Krausmann i inni, 2009, s. 2701). Wyniki badań nie wskazują na spadek, a nawet spowolnienie wzrostu globalnego zużycia materiałów (Krausmann i inni, 2009, s. 2702). Globalnie obserwuje się dalszy wzrost wielkości DMC. Zjawisko bezwzględnej dematerializacji (tj. spadku DMC) obserwowane jest jedynie w okresach recesji gospodarczej. Uwagę zwraca również znaczące zróżnicowanie DMC pomiędzy krajami – w roku 2000 kraje uprzemysłowione (stanowiące 15% światowej populacji) były odpowiedzialne za 1/3 światowego wydobycia zasobów⁹.

Kovanda, Hak (2008) zbadali zmiany w wielkości oraz strukturze zużycia materiałów w Czechach, Węgrzech oraz Polsce w okresie transformacji w latach 1990–2002. Wykorzystano analizę IPAT¹⁰. Zmiany DMC w badanych krajach w niewielkim stopniu wynikają ze zmian w wielkości populacji, natomiast istotnym czynnikiem, zwłaszcza w Polsce, jest wzrost zamożności (konsumpcji na mieszkańca). Postęp technologiczny (mierzony produktywnością DMC/PKB) wpływa na zmniejszenie zużycia zasobów, przy czym największe zmiany w tym zakresie zaszły w Czechach¹¹. Autorzy wskazują, że wzrost produktywności wynika głównie z doskonalenia technologii produkcji oraz zmian strukturalnych gospodarki w kierunku wzrostu udziału sektora usług przy jednoczesnym spadku udziału materiałochłonnych sektorów, zwłaszcza rolnictwa, sektora wydobywczego oraz energetyki (Kovanda, Hak, 2008, s. 731). Wpływ zmian struktury gospodarki na poziom DMC nie był analizowany w pracy.

Bringezu i inni (2004) analizowali zależność pomiędzy wskaźnikami DMI oraz TMR na mieszkańca a poziomem PKB na mieszkańca. Stwierdzono, że struktura TMR różni się znacząco pomiędzy krajami. Kraje osiągają wysoki poziom dochodu przy różnych poziomach TMR – od 32 do 100 ton na mieszkańca. Tym samym wysoki poziom rozwoju gospodarczego jest możliwy przy stosunkowo niskim zapotrzebowaniu na zasoby. Ekonometryczna analiza panelowa wskazu-

⁹ W przypadku paliw kopalnianych, minerałów oraz rud żelaza udział krajów uprzemysłowionych stanowi nawet do 50%.

¹⁰ W ramach analizy IPAT przyjmuje się, że wpływ na środowisko naturalne (ang. *impact*) jest funkcją wielkości populacji (ang. *population*), zamożności (ang. *affluence*) oraz dostępnej technologii (ang. *technology*). Tym samym: $DMC(I) = Population(P) \cdot GDP/Population(A) \cdot DMC/GDP(T)$.

¹¹ Czechy są jednym z niewielu krajów, w którym miało miejsce oddzielenie (ang. *decoupling*) wzrostu gospodarczego od wielkości zapotrzebowania materiałowego. Wynika to przede wszystkim ze zmniejszenia zużycia węgla oraz zmian w strukturze gospodarki na rzecz mniej energochłonnych sektorów (Kovanda, Hak 2008, s. 735)

je, że istnieje tendencja do relatywnego rozdzielenia zmian PKB i DMI, wspólna dla wszystkich krajów. Dostępne dane wskazują na model w kształcie odwróconej litery L.

Steger, Bleischwitz (2011, s. 81) analizowali dane dla krajów EU-15 w latach 1980–2000 oraz EU-27 w latach 1992–2000. Istotne czynniki determinujące poziom DMC na mieszkańca w przypadku EU-15 to konsumpcja energii na mieszkańca, długość sieci drogowej na mieszkańca, liczba ukończonych jednostek mieszkalnych oraz udział importu w PKB. Dla krajów EU-27 są to gęstość populacji, finalna konsumpcja energii na mieszkańca, udział pracowników sektora budowlanego w ogóle zatrudnionych, udział sektora budowlanego w PKB oraz produktywność pracy w sektorze budowlanym. W obu przypadkach istotną zmienną jest zmienna czasowa opisująca autonomiczny postęp techniczny. Jeżeli zmienną objaśnianą był wskaźnik produktywności (ang. *material intensity*), to zmiennymi objaśniającymi były również wskaźniki produkcji energii na mieszkańca, udział sektora usług w PKB, import na mieszkańca, długość sieci kolejowej. Pozwala to na sformułowanie wniosków o istotnym wpływie produkcji oraz konsumpcji energii, wielkości sektora budowlanego oraz stanu infrastruktury na zapotrzebowania materiałowe krajów.

Steinberger i inni (2010) wykorzystują wielkość populacji, powierzchnię, PKB wg siły nabywczej na mieszkańca oraz klimat¹² jako zmienne objaśniające do wyjaśnienia wielkości DMC oraz poszczególnych typów materiałów w wybranej grupie krajów¹³. W świetle wyników, największy wpływ ma wielkość populacji oraz PKB. Zmienna klimat jest istotna tylko w przypadku paliw kopalnianych, natomiast powierzchnia nie jest istotna w przypadku minerałów budowlanych oraz paliw kopalnianych. Zastanawia jednak użycie zmiennych na mieszkańca razem ze zmiennymi w wielkościach bezwzględnych (DMC i populacja). Wydaje się, że wpływ wielkości populacji może być przeszacowany.

Wiedmann i inni (2013) analizowali czynniki kształtujące zapotrzebowanie materiałowe 186 krajów w 2008 roku mierzone wskaźnikiem śladu materiałowego (ang. *material footprint* – MF) na mieszkańca. Zwraca się uwagę, że wskaźniki DMI oraz DMC obejmują masę towarów importowanych, która jest znacznie niższa niż masa materiałów zużywanych w kraju pochodzenia do ich produkcji. Tym samym występuje niedoszacowanie całkowitego zużycia zasobów przez kraje będące dużymi importerami (przeważnie są to kraje rozwinięte). MF koryguje ten efekt. Jako zmienne objaśniające wykorzystano PKB według siły nabywczej na mieszkańca, krajowe wydobycie na mieszkańca (miernik dostępności zasobów naturalnych), gęstość zaludnienia (jako miernik zapotrzebowania na import zasobów).

Zauważmy, że w pracach Steger, Bleischwitz (2011), Steinberger i inni (2010) oraz Wiedmann i inni (2013) wszystkie zmienne były logarytmowane, tj. estymowano parametry modelu log-liniowego postaci:

¹² Wykorzystano szerokość geograficzną kraju dla zmiennej klimat.

¹³ Wszystkie zmienne są logarytmowane.

$$\log(Y) = A + B_1 \log(X_1) + \dots + B_n \log(X_n)$$

tym samym $Y = AX_1^{B_1} \cdot \dots \cdot X_n^{B_n}$. Pozwala to na interpretowanie uzyskanych współczynników jako elastyczności zmiennej objaśnianej względem poszczególnych zmiennych objaśniających.

4. WPŁYW WYBRANYCH CZYNNIKÓW SPOŁECZNO-EKONOMICZNYCH NA WIELKOŚĆ ZAPOTRZEBOWANIA MATERIAŁOWEGO W LATACH 2000–2015

Przedmiotem empirycznych badań może być relacja pomiędzy wielkością zapotrzebowania materiałowego (mierzonego TMR, DMI lub DMC¹⁴) a poziomem rozwoju gospodarczego (mierzonego PKB). W ramach wcześniejszych badań (Telega, 2015, s. 31–47)¹⁵ analizowano relację pomiędzy PKB na mieszkańca w cenach stałych 2000 roku oraz wskaźnikami przepływów materiałowych na mieszkańca – czy realny wzrost PKB pociąga za sobą wzrost ilości wykorzystywanych zasobów oraz jaki jest charakter tej zależności? Oceniając zależność pomiędzy wysokością PKB a DMI¹⁶ oszacowano parametry trzech modeli (liniowy, semi-logarytmiczny oraz kwadratowy) wykorzystując metodę regresji panelowej (model z efektami ustalonymi). Uzyskane wyniki skłaniają do wyboru modelu semi-logarytmicznego jako najlepiej ilustrującego zależność pomiędzy PKB a wskaźnikami zapotrzebowania materiałowego na mieszkańca, tym samym potwierdza się występowanie zjawiska malejących krańcowych przyrostów zapotrzebowania materiałowego, tj. zmniejszenia względnej materiałochłonności gospodarki, w miarę wzrostu PKB na mieszkańca¹⁷.

Biorąc pod uwagę wyniki dotychczasowych badań, jak również dostępność danych w bazie Eurostat, proponuje się następujący zestaw zmiennych objaśniających wraz z hipotetycznym kierunkiem oddziaływania na zmienną objaśnianą, którą jest wskaźnik bezpośredniej konsumpcji materiałów (DMC) na mieszkańca:

— PKB na mieszkańca według PPS (*GDP_pps*) – wskaźnik efektu skali.

W świetle dotychczasowych wyników wzrost gospodarczy oznacza również wzrost ilości zużywanych zasobów.

¹⁴ Wskaźnik całkowitego zapotrzebowania materiałowego (TMR) jest preferowanym wskaźnikiem, jednak dostępność danych w dłuższej serii czasowej przemawia za tym, by w analizie wykorzystać także wskaźnik bezpośrednich nakładów materiałowych (DMI).

¹⁵ Biorąc pod uwagę dostępność danych analizy zostały wykonane dla lat 2000–2007 w przypadku wskaźnika TMR oraz dla lat 2000–2011 w przypadku wskaźnika DMI.

¹⁶ Oba wskaźniki w przeliczeniu na mieszkańca.

¹⁷ Pełne dane statystyczne, jak również szczegółowe wyniki regresji są dostępne u Autora opracowania.

- Finalna konsumpcja energii na mieszkańca (*fin_en_con*) – wskaźnik technologiczny. Większa konsumpcja energii oznacza wzrost zapotrzebowania materiałowego, zwłaszcza na paliwa.
- Łączny udział sektorów rolnictwa, leśnictwa oraz rybactwa, przetwórstwa przemysłowego oraz budowlanego w PKB (*structure*) – alternatywny wskaźnik struktury gospodarki.
- Udział podatków i opłat ekologicznych w przychodach podatkowych (*env_tax*) – wskaźnik skali regulacji środowiskowych. Kraje o bardziej restrykcyjnej polityce ekologicznej mogą się cechować niższym zużyciem materiałów.
- Rok (*year*) – zmienna czasowa opisująca autonomiczny postęp techniczny.

Dane o udziale wartości dodanej poszczególnych sektorów w PKB są udostępniane przez Eurostat zgodnie z klasyfikacją NACE rev. 2¹⁸. Wyodrębnione są sektory przemysłowy (w tym górnictwo oraz przetwórstwo przemysłowe), rolny, budowlany. Wszystkie pozostałe sektory (G-U wg NACE rev. 2) mogą być traktowane jako sektor usług. Wydaje się, że ze względu na różnorodność pozostałych sektorów (również pod względem zapotrzebowania materiałowego), zasadne jest raczej wykorzystanie łącznego udziału sektorów rolnego (w tym leśnictwo oraz rybactwo), budowlanego oraz przetwórstwa przemysłowego¹⁹ w PKB, jako zmiennej opisującej strukturę gospodarki. W pewnym uproszczeniu, malejący udział tych sektorów oznacza również wzrost udziału sektora usług. Zauważa się, że zmiany strukturalne przyczyniają się do zmian w zapotrzebowaniu materiałowym zwłaszcza w krajach rozwijających się lub znajdujących się w okresie transformacji (Kovanda, Hak, 2008, s. 736). W krajach wysoko rozwiniętych ten czynnik jest mniej istotny w porównaniu z postępem technologicznym.

Warto również skomentować użycie zmiennej krajowe wydobycie (DE) na mieszkańca jako wskaźnika dostępności zasobów w danym kraju. Zmienna ta została wykorzystana (Wiedmann i inni, 2013) do wyjaśnienia zróżnicowania wskaźników MF oraz DMC na mieszkańca w wybranej grupie krajów. Biorąc pod uwagę, że zmienną objaśnianą w niniejszej pracy jest wskaźnik DMC, który z definicji jest dany wzorem $DMC = DE + Import - Eksport$, użycie wskaźnika DE w charakterze zmiennej objaśniającej wydaje się być nieuzasadnione.

Analizy wykonano metodą regresji panelowej za pomocą pakietu Gretl²⁰. Dane panelowe mogą być analizowane przy wykorzystaniu estymacji KMNK (ang. *pooled OLS regression*)²¹ lub klasycznych modeli regresji panelowej, tj. modelu

¹⁸ Por. Eurostat (2008), *NACE rev. 2. Statistical classification of economic activities in the European Community*, <http://ec.europa.eu/eurostat/documents/3859598/5902521/KS-RA-07-015-EN.PDF>.

¹⁹ Przetwórstwo przemysłowe jest podsektorem sektora przemysłowego, obok górnictwa oraz podsektora dostawy wody, gospodarki ściekami i odpadami.

²⁰ <http://gretl.sourceforge.net/> Por. też: Kufel (2011, s. 173).

²¹ Warto jednak zaznaczyć, że w istocie model *pooled OLS regression* nie jest modelem danych panelowych, tylko KMNK zastosowana do wszystkich obserwacji.

o efektach ustalonych (estymator wewnątrzgrupowy) oraz modelu o efektach losowych (estymator UMNK; Maddala, 2006, s. 643–645).

Przy wyborze właściwego modelu stosuje się test F (Chowa), test Breuscha-Pagana (test B-P) oraz test Hausmana. Test F Chowa służy do weryfikacji hipotezy o zróżnicowaniu wyrazu wolnego w grupach. Odrzucenie hipotezy zerowej o wspólnym wyrazie wolnym wskazuje na wykorzystanie modelu o efektach stałych. Test Brescha-Pagana służy do weryfikacji hipotezy o istnieniu efektu indywidualnego, co jest równoznaczne z pytaniem, czy wariancja składnika efektów indywidualnych jest równa zero. Tj. $H_0: \sigma_a^2 = 0$ przeciwko $H_1: \sigma_a^2 \neq 0$, gdzie a jest efektem indywidualnym. Przy braku podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej przyjmujemy, że efekty indywidualne nie istnieją oraz model może być estymowany KMNK.

Test Hausmana służy do wyboru pomiędzy modelem o efektach ustalonych (a_i stałe), a modelem o efektach losowych, w którym a_i jest zmienną losową. Test Hausmana wykorzystuje się do zbadania korelacji pomiędzy zmiennymi objaśniającymi a efektami losowymi. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (tj. występowanie korelacji) oznacza, że oba estymatory (wewnątrzgrupowy oraz UMNK) są zgodne, przy czym estymator efektów losowych jest bardziej efektywny. Odrzucenie hipotezy zerowej oznacza, że należy zastosować model o efektach ustalonych, ponieważ estymator UMNK nie jest zgodny.

Zauważa się, że regresje logarytmów zmiennych są preferowane od regresji wielkości liniowych, ponieważ zawierają nieliniowe korelacje, a zatem są wrażliwe na szerszy zakres zależności funkcjonalnych (Steinberger i inni, 2010, s. 1150). Istotnym czynnikiem jest również wygoda interpretacji uzyskiwanych parametrów, jako elastyczności zmiennej objaśnianej względem poszczególnych zmiennych objaśniających. Ponieważ nie ma żadnych teoretycznych przesłanek przemawiających za wyborem konkretnej postaci funkcyjnej modelu, estymowano parametry czterech modeli: liniowego, transformowanego modelu wykładniczego, logarymicznego oraz, wzorem omówionych wyżej badań, modelu log-liniowego. Wyniki testów dla każdego modelu są przedstawione w tabeli 2.

Wyniki testów wskazują, że we wszystkich przypadkach występują efekty indywidualne, przy czym właściwy jest model z efektami stałymi. Wyniki estymacji przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 2. WYNIKI TESTÓW F (CHOWA), BREUSCHA-PAGANA ORAZ HAUSMANA DLA MODELI REGRESJI

Test	F (Chowa)	Breuscha-Pagana	Hausmana
Model liniowy			
Statystyka	F(25, 356) = 64,4485	LM = 1370,77	H = 52,7196
p-value	3,93298e-116	4,72288e-300	3,83994e-010
Model wykładniczy			
Statystyka	F(25, 356) = 60,7878	LM = 1258,97	H = 69,3636
p-value	1,70606e-112	9,32981e-276	1,39009e-013

Tabela 2. WYNIKI TESTÓW F (CHOWA), BREUSCHA-PAGANA ORAZ HAUSMANA DLA MODELI REGRESJI (dok.)

Test	F (Chowa)	Breuscha-Pagana	Hausmana
Model logarytmiczny			
Statystyka	F(25, 356) = 66,588	LM = 1519,57	H = 27,2634
p-value	3,50879e-118	0	5,06846e-005
Model log-liniowy			
Statystyka	F(25, 356) = 69,1625	LM = 1414,48	H = 48,3557
p-value	1,40715e-120	1,49863e-309	3,00492e-009

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. WYNIKI ESTYMACJI PARAMETRÓW MODELI REGRESJI

Model:	Liniowy		Wykładniczy		Logarytmiczny		Log-liniowy	
	Wartość par.	p-value	Wartość par.	p-value	Wartość par.	p-value	Wartość par.	p-value
stała	-25,4684	6,04e-15	0,4977	0,0042	-68,4761	0,0011	-2,6308	0,0159
GDP_pps	0,0004	0,0004	2,4706e-5	1,35e-5	4,3911	0,0543	0,3449	0,0040
fin_en_con	12,1198	4,48e-31	0,6685	6,13e-31	23,5745	5,86e-24	1,4318	2,06e-30
structure	0,2845	0,0046	0,0113	0,0421	7,4265	0,0004	0,3052	0,0057
env_tax	-0,1881	0,2584	-0,0172	0,0617	-0,4842	0,7052	-0,0700	0,2965
year	0,1494	0,0038	0,0052	0,0690	0,7444	0,0096	0,0259	0,0838

Na szaro są zaznaczone nieistotne statystycznie parametry ($p\text{-value} > 0,1$).

Źródło: opracowanie własne.

oceny parametrów modeli pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków co do wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą *ceteris paribus*. Zmienna *GDP_pps* (PKB na mieszkańca według parytetu siły nabywczej) jest istotna niezależnie od specyfikacji modelu. Zwiększenie poziomu zamożności oznacza również wzrost zapotrzebowania materiałowego. Interpretując model log-liniowy można stwierdzić, że wzrost PKB na mieszkańca o 1% powoduje wzrost zapotrzebowania materiałowego o ok. 0,34%. Potwierdza to wyniki uzyskane przez Wiedmann i inni (2013). Finalna konsumpcja energii również jest istotną zmienną o relatywnie dużym wpływie na zmienną objaśnianą, co potwierdza wyniki Steger, Bleischwitz (2011). Współczynnik elastyczności jest równy 1,43, tzn. wzrost konsumpcji energii na mieszkańca o 1% powoduje wzrost konsumpcji materiałów o 1,43% *ceteris paribus*. Potwierdza się występowanie efektu strukturalnego, tj. zmniejszenie udziału sektorów budowlanego, przemysłu oraz rolnictwa (co jest równoważne zwiększeniu udziału sektora usług) w tworzeniu PKB zmniejsza materiałochłonność gospodarki. Przeciwnie, wzrost łącznego udziału wymienionych sektorów o 1% powoduje zwiększenie DMC na mieszkańca o 0,3%. Wyniki estymacji nie potwierdzają istotnego wpływu zmiennej *env_tax* (udział podatków ekologicznych

w przychodach podatkowych). Oszacowane wartości parametru we wszystkich czterech modelach mają znak zgodny z teorią – wzrost udziału podatków i opłat ekologicznych w całkowitych przychodach podatkowych zwiększa motywację podmiotów gospodarczych do wdrażania zasobooszczędnych technologii, jednak nie są one istotne statystycznie. W przypadku zmiennej czasowej opisującej autonomiczny postęp techniczny oszacowane wartości parametru są istotne statystycznie oraz dodatnie, co przeczy teorii. Zauważmy jednak, że dodanie zmiennej czasowej w postaci liniowego trendu może odzwierciedlać wpływ innych czynników o dodatnim wpływie na poziom DMC, nieuwzględnionych bezpośrednio w modelu.

Ostatecznie, ze względu na wygodę interpretacji wartości parametrów, związek pomiędzy DMC na mieszkańca a dobranymi zmiennymi objaśniającymi może być opisany za pomocą modelu log-liniowego. Porównując uzyskane wartości parametrów przy zmiennych *GDP_pps*, *fin_en_con* oraz *structure* stwierdzamy, że działania podejmowane w ramach polityki rozdzielania wzrostu gospodarczego od wielkości zapotrzebowania materiałowego powinny być przede wszystkim skierowane na zmniejszenie finalnej konsumpcji energii. Wskazanie instrumentów właściwych do tego celu wykracza poza zakres opracowania. Po drugie, zmniejszenia zapotrzebowania materiałowego może być wynikiem stopniowej transformacji gospodarki w kierunku większego udziału sektora usług.

Zauważmy, że zmniejszenia konsumpcji energii będzie miało również pozytywny skutek w postaci zmniejszenia emisji gazów cieplarnianych, zwłaszcza w tych krajach, w których energetyka jest wciąż oparta na węglu.

5. ZAKOŃCZENIE

Ochrona przyrody lub, mówiąc językiem ekonomii, zachowanie kapitału naturalnego jest istotnym czynnikiem zapewnienia dobrobytu dla obecnych oraz przyszłych pokoleń. Warto podkreślić, że zachowanie nie oznacza rezygnacji z produkcji oraz konsumpcji dóbr, wymagany jest jednak szereg zmian o charakterze strukturalnym oraz technologicznym, które pozwolą na stosunkowo małą deprecjację kapitału naturalnego. Skutecznym narzędziem monitorowania postępów w tym zakresie może być ciągle rozwijany rachunek przepływów materialnych. Zróżnicowana dynamika kształtowania się zapotrzebowania materiałowego w krajach wysoko rozwiniętych skłania ku poszukiwaniu czynników umożliwiających utrzymanie wzrostu PKB przy relatywnie mniejszym przyroście zapotrzebowania materiałowego. W świetle uzyskanych wyników wpływ na to mają zmiany strukturalne gospodarek krajów wysokorozwiniętych (m.in. wzrost udziału sektora usług) oraz zmiany technologiczne zmniejszające finalną konsumpcję energii. Wzrost PKB na mieszkańca przyczynia się natomiast do wzrostu zapotrzebowania materiałowego. Wdrożenie recyklingu, jak również stosowanie od-

powiednich zachęt, m.in. w postaci podatków i opłat ekologicznych może mieć swój wpływ, aczkolwiek nie znajduje to na razie potwierdzenia empirycznego. Niewątpliwie potrzebne są dalsze badania czynników determinujących wielkość zapotrzebowania materiałowego.

W ramach przyszłych badań warto również zwrócić uwagę na problemy metodologiczne związane z estymacją na danych panelowych, tj. autokorelację oraz heteroskedastyczność składnika losowego (Bringezu i inni, 2004, s. 107). W niniejszej pracy problemy te zostały pominięte.

Zauważa się również, że wskaźniki typu *material footprint* (Wiedmann i inni, 2013) są znacznie lepszym miernikiem zapotrzebowania materiałowego gospodarki. Eurostat zaczął publikować skorygowane dane o zapotrzebowaniu materiałowym (ang. *raw material equivalents*). Niestety, w chwili przygotowywania niniejszej pracy, zagregowane dane dla 28 krajów UE dostępne były jedynie dla lat 2005–2014.

LITERATURA

- Bringezu S., Schütz H., Moll S., (2003), Rationale for and Interpretation of Economy-Wide Materials Flow Analysis and Derived Indicators, *Journal of Industrial Ecology*, 7 (2), 43–64.
- Bringezu S., Schütz H., Steger S., Baudisch J., (2004), International Comparison of Resource Use and its Relation to Economic Growth. The Development of Total Material Requirement, Direct Material Inputs and Hidden Flows and the Structure of TMR, *Ecological Economics*, 51 (1–2), 97–124.
- Eurostat, (2001), Economy-Wide Material Flow Accounts and Derived Indicators, A methodological Guide, *epp.eurostat.ec.europa.eu*.
- Fischer-Kowalski M., Krausmann F., Giljum S., Lutter S., Mayer A., Bringezu S., Moriguchi Y., Schütz H., Schandl H., Weisz H., (2011), Methodology and Indicators of Economy-Wide Material Flow Accounting. State of the Art and Reliability Across Sources, *Journal of Industrial Ecology*, 15 (6), 855–876.
- Hinterberger F., Luks F., Schmidt-Bleek F., (1997), Material Flows vs. "Natural Capital". What Makes an Economy Sustainable?, *Ecological Economics*, 23 (1), 1–14.
- Komisja Europejska, (2011), *Plan działania na rzecz zasobooszczędnej Europy*, <http://ec.europa.eu>.
- Kovanda J., Hak T., (2008), Changes in Materials Use in Transition Economies, *Journal of Industrial Ecology*, 12 (5/6), 721–738.
- Krausmann F., Gingrich S., Eisenmenger N., Erb K.-H., Haberl H., Fischer-Kowalski M., (2009), Growth in Global Materials use, GDP and Population During the 20th Century, *Ecological Economics*, 68 (10), 2696–2705.
- Kufel T., (2011), *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu Gretl*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Maddala G. S., (2006), *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Meyer B., (2011), Macroeconomic Modelling of Sustainable Development and the Links Between the Economy and the Environment, GWS Research Report Series 12–1, http://ec.europa.eu/environment/enveco/studies_modelling/pdf/report_macroeconomic.pdf.

- Parlament Europejski, (2012), Resource Efficiency in European Industry, Annex: Availability of TMR Data, <http://www.europarl.europa.eu/studies>.
- Pothen F., Schymura M., (2015), Bigger Cake with Fewer Ingredients? A Comparison of Material Use of the World Economy, *Ecological Economics*, 109, 109–121.
- Schutz H., Śleszyński J., (2000), Macroeconomic Indicator of Sustainable Development: Total Material Requirement (TMR) for Polska, University of Warsaw, Economic Discussion Papers, 54, Warsaw.
- Steger S., Bleischwitz R., (2011), Drivers for the Use of Materials Across Countries, *Journal of Cleaner Production*, 19 (8), 816–826.
- Steinberger J. K., Krausmann F., Eisenmenger N., (2010), Global Patterns of Material Use: A Socio-economic and Geophysical Analysis, *Ecological Economics*, 69 (5), 1148–1158.
- Świerkula E., (2006), Ocena możliwości obliczenia wskaźników przepływów materiałowych w oparciu istniejące dane krajowe według wypracowanych metodyk Europejskiej Agencji Środowiska i Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju, Ekspertyza wykonana na zamówienie Głównego Inspektoratu Ochrony Środowiska, Instytut na rzecz Ekorozwoju.
- Telega I., (2015), Kapitał naturalny a proces ekologizacji gospodarki, w: Koźuch M., (red.), *Ekologizacja gospodarki*, Fundacja Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Weisz H., Krausmann F., Amanna C., Eisenmenger N., Erb K.-H., Hubacek K., Fischer-Kowalski M., (2006), The Physical Economy of the European Union: Cross-Country Comparison and Determinants of Material Consumption, *Ecological Economics*, 58 (4), 676–698.
- Wiedmann T. O., Schandl H., Lenzen M., Moran D., Suh S., West J., Kanemoto K., (2013), The Material Footprint of Nations, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 112 (20).

CZYNNIKI ZAPOTRZEBOWANIA MATERIAŁOWEGO W KRAJACH UE W LATACH 2000–2015

Streszczenie

Korzystanie z zasobów naturalnych jest istotnym czynnikiem degradacji środowiska naturalnego oraz utraty bioróżnorodności. Problem ten znajduje odzwierciedlenie w dokumentach strategicznych UE, m.in. strategii Europa 2020, w której jedną z inicjatyw przewodnich jest „Europa efektywnie korzystająca z zasobów”. Obecnie rozwijane są rachunki przepływów materiałowych (Material Flow Accounts – MFA), w ramach których szacuje się zagregowane miary zapotrzebowania i konsumpcji materiałów przez poszczególne kraje. Celem opracowania jest określenie wpływu wybranych czynników na ilość zużywanych zasobów w wybranych krajach Europy z wykorzystaniem modeli regresji panelowej. Ze względu na dostępność danych badanie jest ograniczone do lat 2000–2015 oraz krajów Europy. W świetle uzyskanych wyników łączny udział sektora budowlanego, przemysłu oraz rolnictwa, wysokość PKB według PSN oraz finalna konsumpcja energii na mieszkańca wpływają za zwiększenie zapotrzebowania materiałowego. Wpływ instrumentów polityki ekologicznej w postaci podatków i opłat nie został potwierdzony.

W krajach rozwiniętych wzrost PKB jest możliwy przy stosunkowo mniejszym wzroście zapotrzebowania materialnego. Może to być spowodowane zmianami strukturalnymi w gospodarkach krajów rozwiniętych, postępem technologicznym, wdrożeniem recyklingu oraz stosowaniem zachęt w postaci podatków i opłat ekologicznych. Niewątpliwie, potrzebne są dalsze badania czynników determinujących wielkość zapotrzebowania materiałowego.

Słowa kluczowe: zapotrzebowanie materiałowe, zasoby naturalne, regresja panelowa, zrównoważony i trwały rozwój.

FACTORS OF MATERIAL CONSUMPTION IN EU COUNTRIES IN 2000–2015

Abstract

The use of natural resources is an important factor for environmental degradation and biodiversity loss. This problem is reflected in EU strategic documents, including Europe 2020 strategy, where one of the main initiatives is "resource efficient Europe". Materials Flow Accounts (MFA) are currently being developed, allowing to estimate the aggregate measures of demand and consumption of materials by each country. The aim of the study is to determine the influence of selected factors on the amount of resources consumed in selected European countries using panel regression models. Due to the availability of data, the study is limited to 2000–2015 period and European countries. According to the results obtained, the combined share of the construction, industrial and agriculture sectors, GDP PPS and final energy consumption per capita increase the demand on materials. The impact of environmental policy instruments in the form of taxes and fees has not been confirmed.

In developed countries GDP growth is possible with a relatively smaller increase in material demand. This may be due to structural changes in the economies of developed countries, technological change, the implementation of recycling, and the use of incentives, such as environmental taxes. Undoubtedly, further studies of factors determining the volume of material demand are needed.

Keywords: material requirement, natural resources, panel regression, sustainable development

Agnieszka SOMPOLSKA-RZECHUŁA¹
Małgorzata MACHOWSKA-SZEWCZYK²

Warunki życia w powiatach ziemskich województwa zachodniopomorskiego w latach 2002–2015 w świetle zmian demograficznych

1. WPROWADZENIE

Badania dotyczące sytuacji i zmian społeczno-gospodarczych już od ponad kilkudziesięciu lat stanowią przedmiot analiz przedstawicieli różnych dyscyplin naukowych. Nastąpiło odejście od mierzenia jedynie materialnego wymiaru życia a w ocenie stopnia zaspakajania potrzeb ludzi wykorzystuje się takie kategorie badawcze, jak: konsumpcja, poziom życia, stopa życia, standard życia, dobrobyt ekonomiczny, zamożność, warunki życia, jakość życia, sposób życia, styl życia (Zagroda, 2016). Problematyczne są kwestie definicyjne wskazanych kategorii odnoszące się zarówno do definicji koncepcyjnej (co mierzyć i dlaczego?), jak i operacyjnej (jak mierzyć?). Należy podkreślić, że do chwili obecnej teoretycy nie opracowali jednoznacznych definicji wymienionych kategorii. Można jedynie wskazać pewne propozycje badania społecznego wymiaru przemian gospodarczych.

Celem badań była ocena warunków życia ludności województwa zachodniopomorskiego na tle zmian liczby ludności. Badanie dotyczyło powiatów ziemskich. Zmiany liczby ludności analizowano w okresie 2002–2015, natomiast warunki życia mieszkańców zostały ocenione w latach: 2004, 2007 i 2015. Wybór okresu badawczego odnoszącego się do warunków życia powiązany był ze wstąpieniem Polski do UE oraz z zakończeniem pierwszego i drugiego okresu finansowania ze środków UE. Opracowanie ma charakter deskryptywno – empiryczny.

Ocena warunków życia ludności jest zagadnieniem skomplikowanym, ponieważ badana kategoria jest trudna do kwantyfikacji. Ze względu na wieloaspektowy charakter kategorii warunki życia do realizacji celu pracy wykorzystano jedną z metod wielowymiarowej analizy porównawczej – metodę liniowego po-

¹ Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Ekonomiczny, Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, ul. Janickiego 31, 71–270 Szczecin, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: asompolska@zut.edu.pl

² Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Informatyki, Katedra Metod Sztucznej Inteligencji i Matematyki Stosowanej, ul. Żołnierska 49, 71–210 Szczecin, Polska.

rządkowania obiektów. W analizie cech opisujących badane zjawisko stwierdzono, iż mają one asymetryczne rozkłady. Z tego względu do oceny warunków życia wykorzystano podejście pozycyjne oparte na medianie Webera. Na uwagę zasługuje fakt, iż ocena warunków życia mieszkańców powiatów ziemskich województwa zachodniopomorskiego została przedstawiona w sposób dynamiczny, w świetle zmian liczby ludności i na podstawie autorskiej propozycji zestawu wskaźników mierzących warunki życia w ujęciu lokalnym. Uzyskane wyniki mogą być użyteczne dla władz samorządowych w podejmowaniu decyzji, dotyczących poprawy poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego w województwie.

2. WARUNKI ŻYCIA LUDNOŚCI – KWESTIE DEFINICYJNE

W ocenie stopnia zaspokojenia potrzeb ludności stosowanych jest wiele kategorii badawczych, do których należą m.in. dobrobyt, poziom życia, warunki życia, stopa życiowa, standard życia, zamożność, jakość życia, godność życia. Obejmują one najczęściej zarówno materialną, jak i niematerialną sferę życia (Podolec, 2014). W prezentowanym opracowaniu skupiono uwagę na kategorii warunki życia, a dokładniej, na wybranych aspektach materialnej sfery warunków życia. Pojęcia warunki życia i poziom życia często stosowane są zamiennie. Warto jednak zaznaczyć, że nie są one jednoznaczniowe. Warunki życia określają całokształt czynników determinujących zaspokojenie potrzeb ludzkich, wpływających na poziom życia i możliwości ich zaspokojenia. Poziom życia zaś odnosi się do samego stopnia zaspokojenia potrzeb ludzkich (Luszniewicz, 1972). Badania stopnia zaspokajania potrzeb rozpoczęły się od ocen warunków życia, które traktowane były jako obiektywne aspekty życia, zabezpieczające materialną stronę życia ludzi (Słaby, 2007). Coraz częściej, w kontekście infrastruktury zaspokajania potrzeb, w badaniu warunków życia uwzględniane są cechy o charakterze subiektywnym (Słaby, 2007). Jak podkreślała Słaby (2004) należy inaczej ujmować problemy badań społecznych i to we wszystkich ich aspektach metodologicznych. Dotyczy to przede wszystkim uwzględnienia asymetrii rozkładów cech i występowania obserwacji ekstremalnych (odstających). Stąd zaproponowano metodę pozycyjną, opartą na medianie.

Analizując warunki życia warto przyjrzeć się niektórym określeniom tej kategorii. Hodoly (1975) podaje że, *warunki życia są całokształtem czynników determinujących zaspokojenie potrzeb ludzkich*. Natomiast Tkocz, Zuzańska-Żyśko (1996) uważają, że o warunkach życia człowieka decyduje możliwość zaspokojenia jego codziennych, elementarnych potrzeb w zakresie mieszkalnictwa, handlu, gastronomii, usług bytowych, ochrony zdrowia, oświaty, kultury i wypoczynku. Według Słaby (2007) warunki życia to całokształt obiektywnych warunków, o charakterze infrastrukturalnym, w jakich żyje społeczeństwo (grupy społeczne, gospodarstwa domowe i jednostki). Wiążą się one przede wszystkim z kondycją materialną, zabezpieczeniem egzystencjalnym i środowiskowym życia jedno-

stek. Warunki życia stanowią zatem wieloaspektową kategorię badawczą obejmującą materialną sferę życia ludności – uwzględniającą sytuację finansową gospodarstw domowych, stan posiadanych nieruchomości, przedmiotów trwałego użytkowania lub innych zasobów materialnych oraz niematerialne aspekty życia: stan zdrowia i warunki jego ochrony, sytuację na rynku pracy, poczucie bezpieczeństwa, integracji społecznej, formy oraz możliwości spędzania czasu wolnego i inne (Podolec, 2014). W niniejszej pracy warunki życia były rozpatrywane jako obiektywne czynniki wpływające na poziom zaspokojenia potrzeb i standard życia gospodarstw domowych.

Bardzo ważnym elementem oceny warunków życia ludności jest dokonanie pomiaru i porównanie badanej kategorii między jednostkami (np. województwami). Kompleksowa ocena warunków życia wymaga zastosowania wielu wskaźników odzwierciedlających zaspokojenie poszczególnych grup potrzeb. W procesie operacjonalizacji pojęcia warunki życia dokonuje się wyboru i selekcji wskaźników, które pozwoliłyby na rozpoznanie wyróżnionych domen życia. OECD (2011) zaproponowała system pomiaru dobrobytu (w tym dobrobytu ekonomicznego) i zastosowała go do analizy porównawczej jakości życia krajów będących członkami tej organizacji. W ramach systemu zostało wyróżnionych 11 domen dobrobytu (Panek, 2015), w tym pierwsze trzy: dochody i zasobność, praca i wynagrodzenie oraz warunki mieszkaniowe określają materialne warunki życia (dobrobyt ekonomiczny) determinujące możliwości konsumpcyjne ludzi oraz możliwości zarządzania swoimi zasobami. W systemie OECD dochody określone zostały za pomocą takich wskaźników, jak: dochód netto (obiektywny) i samoocena sytuacji dochodowej (subiektywny), a pomiar konsumpcji następuje przez samoocenę ograniczeń budżetowych (wskaźnik subiektywny), zaś warunki mieszkaniowe zostały określone za pomocą wskaźników obiektywnych: warunki sanitarne mieszkania, stan techniczny mieszkania, brak samochodu z przyczyn finansowych, brak możliwości zaspokojenia potrzeb związanych z wypoczynkiem z przyczyn finansowych oraz brak możliwości zaspokojenia potrzeb żywnościowych z przyczyn finansowych i wskaźnika o charakterze subiektywnym – samoocena sytuacji mieszkaniowej (OECD, 2011).

Dotychczas nie został określony zbiór wskaźników, który w sposób uniwersalny opisywałby warunki życia wszystkich grup ludności, uwzględniając liczne jego aspekty, oraz mógłby stanowić podstawę do prowadzenia analiz porównawczych w czasie i przestrzeni. Warunki życia określać można na podstawie wskaźników stanowiących obiektywne kryterium oceny lub na podstawie subiektywnej oceny dokonanej przez jednostki wchodzące w skład badanej zbiorowości (Podolec, 2014). W drugim przypadku, zależnie od sformułowanego pytania, ocena ta może odnosić się do całokształtu warunków życia bądź wybranych domen. Niniejsze badanie koncentruje się na materialnej sferze warunków życia. W celu dokonania operacjonalizacji kategorii wybrano domeny, a w każdej domenie wyróżniono wskaźniki charakteryzujące badany obszar życia. Propozycję domen oraz wskaźników przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. DOMENY I WSKAŹNIKI CHARAKTERYZUJĄCE WARUNKI ŻYCIA LUDNOŚCI POWIATÓW ZIEMSKICH WOJEWÓDZTWA ZACHODNIOPOMORSKIEGO

Domena	Wskaźnik
Demografia	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ludność w miastach w % ogółu ludności 2. Przyrost naturalny na 1000 mieszkańców 3. Liczba zgonów na 1000 mieszkańców 4. Zgony niemowląt na 1000 urodzeń żywych 5. Saldo migracji na 1000 ludności 6. Liczba kobiet na 100 mężczyzn 7. Ludność w wieku nieprodukcyjnym na 100 osób w wieku produkcyjnym 8. Małżeństwa na 1000 ludności 9. Rozwody na 1000 ludności 10. Separacje na 100 tys. ludności
Stan i ochrona środowiska	<ol style="list-style-type: none"> 1. Liczba ludności korzystająca z oczyszczalni ścieków w % ludności ogółem 2. Emisja zanieczyszczeń pyłowych w t na 1 km² powierzchni powiatu 3. Emisja zanieczyszczeń gazowych w t na 1 km² powierzchni powiatu 4. Odpady wytworzone (w ciągu roku) w tys. t na 1 km² powierzchni powiatu 5. Powierzchnia o szczególnych walorach przyrodniczych prawnie chroniona w ha na 1 ha powierzchni powiatu 6. Pomniki przyrody na 100 ha powierzchni powiatu
Rynek pracy	<ol style="list-style-type: none"> 1. Liczba kobiet w ogólnej liczbie pracujących (%) 2. Liczba pracujących w rolnictwie, łowiectwie i leśnictwie, rybactwie w ogólnej liczbie pracujących (%) 3. Liczba pracujących w przemyśle i budownictwie w ogólnej liczbie pracujących (%) 4. Liczba pracujących w usługach w ogólnej liczbie pracujących (%) 5. Liczba bezrobotnych kobiet w liczbie bezrobotnych (%) 6. Stopa bezrobocia (%) 7. Liczba ofert pracy na 100 bezrobotnych 8. Bezrobotni w wieku poniżej 25 lat w liczbie bezrobotnych (%) 9. Liczba bezrobotnych w wieku powyżej 55 lat w ogólnej liczbie bezrobotnych (%) 10. Liczba bezrobotnych z wykształceniem wyższym w ogólnej liczbie bezrobotnych (%) 11. Liczba bezrobotnych powyżej 24 miesięcy w ogólnej liczbie bezrobotnych (%)
Infrastruktura komunalna i mieszkania	<ol style="list-style-type: none"> 1. Długość sieci wodociągowej w km na 1 km² powierzchni powiatu 2. Długość sieci kanalizacyjnej w km na 1 km² powierzchni powiatu 3. Roczne zużycie wody z wodociągów w gospodarstwach domowych na 1 mieszkańca w m³ 4. Zużycie gazu z sieci na 1 mieszkańca w m³ 5. Zużycie energii elektrycznej na 1 mieszkańca w kWh 6. Zasoby mieszkaniowe na 1000 mieszkańców 7. Przeciętna liczba osób na 1 mieszkanie 8. Przeciętna powierzchnia użytkowa w m² mieszkania 9. Budynki mieszkalne oddane do użytkowania na 100 mieszkańców 10. Przeciętna powierzchnia użytkowa mieszkania oddanego do użytkowania w m² 11. Mieszkania oddane do użytkowania na 1000 ludności

Tabela 1. DOMENY I WSKAŹNIKI CHARAKTERYZUJĄCE WARUNKI ŻYCIA LUDNOŚCI POWIATÓW ZIEMSKICH WOJEWÓDZTWA ZACHODNIOPOMORSKIEGO (dok.)

Domena	Wskaźnik
Edukacja, kultura i turystyka	<ol style="list-style-type: none"> 1. Liczba dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1 tys. dzieci w wieku 3–5 lat 2. Liczba dzieci w wieku 3-5 lat przypadające na jedno miejsce w placówce wychowania przedszkolnego 3. Współczynnik scholaryzacji brutto – szkoły podstawowe (%) 4. Współczynnik scholaryzacji netto – szkoły podstawowe (%) 5. Wypożyczenia w woluminach na 1 czytelnika 6. Liczba ludności na 1 placówkę biblioteczną 7. Liczba ludności na 1 miejsce w kinach stałych 8. Miejsca noclegowe na 1000 ludności 9. Udzielone noclegi na 1000 ludności 10. Turyści korzystający z noclegów na 1000 ludności 11. Udzielone noclegi turystom zagranicznym w ogólnej liczbie udzielonych noclegów (%)
Ochrona zdrowia i bezpieczeństwo publiczne	<ol style="list-style-type: none"> 1. Łóżka w szpitalach ogólnych na 10 tys. ludności 2. Liczba ludności na 1 aptekę 3. Liczba praktyk lekarskich ambulatoryjnych na 100 osób 4. Przestępstwa stwierdzone w zakończonych postępowaniach przygotowawczych na 1000 ludności 5. Wskaźniki wykrywalności sprawców przestępstw stwierdzonych

Źródło: opracowanie własne na podstawie Województwo zachodniopomorskie 2005, 2008, 2016, Bank Danych Lokalnych.

3. METODA BADAWCZA

W opracowaniu do oceny warunków życia ludności w powiatach zastosowano podejście, w którym wartości zmiennych są porównywane z wartościami tych cech dla obiektu modelowego, czyli posłużono się procedurą wyznaczania zmiennej syntetycznej ze wzorcem. Inicjatorem zastosowania zmiennych syntetycznych do porządkowania obiektów wielowymiarowych był Hellwig, który w pracy (1968) jako pierwszy zaproponował tzw. taksonomiczną miarę rozwoju gospodarczego.

Jeżeli $\{O_1, \dots, O_N\}$ stanowi zbiór obiektów opisanych za pomocą cech ze zbioru $\{X_1, \dots, X_M\}$, to zmienna syntetyczna jest określona jako funkcja, która przekształca macierz unormowanych wartości zmiennych X_1, \dots, X_M w wektor $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_N]$. Zatem zmienna syntetyczna, zwana również metacechą, w sposób jednowymiarowy pozwala scharakteryzować zjawiska wielowymiarowe.

Procedura badania, w którym wykorzystuje się cechę syntetyczną obejmuje następujące etapy (Hellwig, 1968; Wysocki, 2010):

1. Wybór cech prostych, istotnych z punktu widzenia badanego zjawiska, dokonanie ich pomiaru dla badanych obiektów oraz sporządzenie ostatecznej listy cech, przez usunięcie cech o słabej zmienności oraz nadmiernie skorelowanych z innymi.

2. Ustalenie kierunku preferowanej zmiany cech pod względem badanego zjawiska i pozycji obiektów oraz ich normalizacja.
3. Wybór odpowiedniej metody agregacji oraz wyznaczenie wartości syntetycznego miernika rozwoju dla każdego obiektu.
4. Konstrukcja rankingu obiektów.
5. Rozpoznanie typów rozwojowych, merytoryczna ocena i interpretacja.

Na początku badania należy wybrać cechy, które opisują ustalone obiekty ze względu na przyjęty cel badania. W tym kroku przeprowadza się najpierw dobór merytoryczny, czyli np. korzystając z opinii ekspertów tworzy listę cech w sposób istotny logicznie powiązanych z rozpatrywanym zjawiskiem. Potem należy dokonać weryfikacji eliminując zmienne, które mało różnicują badane obiekty. Najczęściej w tym celu oblicza się współczynniki zmienności i usuwa te cechy, dla których wartości bezwzględne tych współczynników nie przekraczają pewnej wielkości przyjętej arbitralnie np. 10% (Nowak, 1990; Młodak i inni, 2016). Ze wstępnej listy należy również usunąć zmienne nadmiernie skorelowane, czyli powielające informacje. W pracy wykorzystano w tym celu metodę parametryczną Hellwiga (1981). W efekcie otrzymuje się ostateczną listę cech diagnostycznych.

W kolejnym kroku trzeba zidentyfikować kierunek oddziaływania zmiennych na status obiektów z uwzględnieniem kryterium ogólnego – warunków życia. Przy wyznaczaniu wartości syntetycznego wskaźnika rozwoju dokonuje się sumowania wartości poszczególnych cech, dlatego należy ujednoczyć kierunek preferencji, czyli zamienić destymulanty oraz nominanty na stymulanty. Bardzo często w tym celu stosuje się jedną z formuł (Walesiak, 1993; Wysocki, 2010):

- dla destymulant: przekształcenie różnicowe $x'_{ij} = a - b \cdot x_{ij}$ lub przekształcenie ilorazowe $x'_{ij} = b/x_{ij}$, gdzie a, b są stałymi przyjmowanymi arbitralnie (najczęściej $a = 0, b = 1$), $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$,
- dla nominant:

$$x'_{ik} = \begin{cases} x_{ik} & \text{dla } x_{ik} \leq \text{nom}\{x_{ik}\}, \\ 2 \cdot \text{nom}\{x_{ik}\} - x_{ik} & \text{dla } x_{ik} > \text{nom}\{x_{ik}\}, \end{cases}$$

gdzie $\text{nom}\{x_{ik}\}$ oznacza wartość optymalną cechy X_k dla obiektu O_i , $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$.

Jeżeli cechy przyjęte do opisu badanego zjawiska charakteryzują się silną asymetrią lub przyjmują wartości odstające, to w wyniku zastosowania klasycznej metody konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju może pojawić się problem z przypisaniem nadmiernie wysokiej lub niskiej rangi niektórym obiektom (Młodak, 2006). Zatem mogą wystąpić duże błędy w klasyfikacji, z tego względu w badaniach typologicznych przy tworzeniu rankingów należy poszukiwać metod

porządkowania liniowego, które są odporne na opisane sytuacje. Do takich metod można zaliczyć te, które wykorzystują medianę, gdyż jest to statystyka odporna na występowanie wartości odstających. W badaniu warunków życia ludności powiatów województwa zachodniopomorskiego zastosowano metodę wykorzystującą medianę Webera. Wektor medianowy określony jako „mediana przestrzenna” lub „mediana Webera” jest rozwiązaniem pewnego zadania optymalizacyjnego.

W wielowymiarowej analizie danych poszukiwanie punktu minimalizującego sumę odległości od N punktów w przestrzeni \mathbb{R}^M sprowadza się do zagadnienia zwanego problemem Webera (szerzej opisanego w pracy Młodaka, 2009). Dla liczb naturalnych N , M oraz parami różnych N punktów $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iM}) \in \mathbb{R}^M$ poszukuje się punktu $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M) \in \mathbb{R}^M$, dla którego suma odległości od pozostałych stanowi wartość minimalną, czyli:

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M (x_{ij} - \theta_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \min_{\mathbf{A}=(a_1, \dots, a_M) \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M (x_{ij} - a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Punkt $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ nazywany jest medianą Webera i jest uogólnieniem pojęcia klasycznej mediany na przypadek wielowymiarowy. Zadanie wyznaczenia tego punktu okazało się dość trudne. Bedall, Zimmermann (1979), wykorzystując rachunek różniczkowy, przedstawili metodę numerycznego wyznaczenia mediany Webera. Aby znaleźć współrzędne punktu $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ należy wyznaczyć wartość minimalną funkcji $f: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}_+$, określonej dla dowolnego $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_M) \in \mathbb{R}^M$ następująco:

$$f(\mathbf{A}) = f(a_1, \dots, a_M) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M (x_{ij} - a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, czyli pochodne cząstkowe pierwszego rzędu powinny wynosić zero. Zatem należy wyznaczyć gradient funkcji:

$$\nabla f(\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_M} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^N (a_j - x_{ij}) \left(\sum_{p=1}^M (x_{ip} - a_p)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (4)$$

oraz hesjan czyli macierz pochodnych drugiego rzędu:

$$\mathbf{H}f(\mathbf{A}) = \mathbf{I} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\sum_{p=1}^M (x_{ip} - a_p)^2)^{\frac{1}{2}}} - \mathbf{Q}f(\mathbf{A}), \quad (5)$$

gdzie

\mathbf{I} – macierz jednostkowa o wymiarze $M \times M$,

$$\mathbf{Q}f(\mathbf{A}) = [q_{hif}(\mathbf{A})]_{M \times M},$$

$$q_{hjf}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^N \frac{(x_{ih} - a_h)(x_{ij} - a_j)}{(\sum_{p=1}^M (x_{ip} - a_p)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad h, j = 1, \dots, M.$$

Wektor $\Delta(\mathbf{A}) = [\delta(a_1), \dots, \delta(a_M)]$ przyrostów współrzędnych mediany Webera jest rozwiązaniem następującego równania macierzowego:

$$\mathbf{H}f(\mathbf{A}) \cdot \Delta(\mathbf{A}) = -\nabla f(\mathbf{A}). \quad (6)$$

Poszukiwanie mediany Webera odbywa się w sposób iteracyjny, tzn. w przestrzeni \mathbb{R}^M ustala się punkt początkowy $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_M)$ i dokładność szacunku $\varepsilon > 0$. Następnie oblicza odległości punktu początkowego od wszystkich pozostałych punktów $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^M, i = 1, \dots, N$. W kolejnym kroku procedury wyznacza się pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu. Jeżeli przynajmniej jedna ze współrzędnych gradientu jest większa od założonej wartości ε , to rozwiązuje się układ równań (6) ze względu na wektor przyrostów $\Delta(\mathbf{A}) = [\delta(a_1), \dots, \delta(a_M)]$. Następuje przesunięcie punktu początkowego i wyznaczenie nowych jego współrzędnych $\mathbf{A} := \mathbf{A} + \Delta(\mathbf{A})$. Procedurę powtarza się, czyli dla nowego punktu wyznaczyć należy odległości od wszystkich pozostałych punktów, gradient, hezjan oraz ponownie sprawdzić, czy wartości współrzędnych gradientu nie przekraczają zadanej wartości ε . Jeżeli warunek ten zostanie spełniony, to przyjmuje się, że otrzymany w ostatniej iteracji punkt stanowi poszukiwaną medianę Webera czyli $\boldsymbol{\theta} \approx \mathbf{A}$.

W przedstawionej procedurze błąd aproksymacji jest mierzony za pomocą odchylenia gradientu funkcji od wektora zerowego. W przypadku bardzo rozrzuconych wartości poszczególnych cech, wybór punktu początkowego w sposób zupełnie dowolny może spowodować, że trafi się na punkt przegięcia funkcji i wówczas nie będzie możliwe rozwiązanie równania macierzowego (6). Poza niektórymi specyficznymi sytuacjami, wskazane jest wybranie punktu startowego w algorytmie poszukiwania mediany Webera jako punktu o współrzędnych będących standardowymi medianami wartości poszczególnych cech, czyli: $\mathbf{A}_{pocz} = (\text{med}(X_1), \dots, \text{med}(X_M))$.

Następny etap wymaga sprowadzenia do porównywalności, czyli pozbawienia mian oraz ujednoczenia rzędu wielkości poszczególnych cech, co czyni się za pomocą różnych formuł normalizacyjnych (Borys, 1978; Grabiński, 1984; Strahl, 1990; Walesiak, 2006; Wysocki, 2010). Lira i inni (2002) zaproponowali następujący sposób normalizacji z wykorzystaniem mediany Webera:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \theta_j}{1,4826 \cdot \text{mad}(X_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (7)$$

gdzie

- z_{ij} – wartość zestandaryzowana zmiennej X_j dla obiektu O_i ,
- x_{ij} – wartość zmiennej X_j dla obiektu O_i ,
- θ_j – wartość j -tej współrzędnej mediany Webera,
- $\text{mad}(X_j)$ – medianowe odchylenie bezwzględne wyrażone jako mediana odległości wartości ustalonej cechy od współrzędnej mediany Webera czyli: $\text{mad}(X_j) = \text{med}_i |x_{ij} - \theta_j|$.

Wartość oczekiwana rozkładu zmiennych zestandaryzowanych w taki sposób jest w przybliżeniu równa zero i odchylenie standardowe zbliża się do 1 (Młodak, 2009).

Dla niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_M o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma)$, $\sigma > 0$ dla dużych $K \in \mathbb{N}$ i $K \leq M$ wartość oczekiwana $E(1,4826 \text{ mad}(X_1, \dots, X_K)) \approx \sigma$, czyli oszacowane w ten sposób skorygowane medianowe odchylenie bezwzględne jest zbliżone do odchylenia standardowego rozkładów zmiennych losowych $\{X_1, \dots, X_K\}$. Wartość 1,4826 otrzymano w wyniku szacunku jako odwrotność przeciwobrazu funkcji dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego dla wartości 0,75, czyli $1,4826 = \frac{1}{\varphi^{-1}(0,75)}$, gdzie φ jest dystrybuantą rozkładu $N(0, 1)$ (Młodak, 2009).

W kolejnym kroku ustala się wartości dla obiektu wzorcowego np. według formuły (Wysocki, 2010):

$$A^+ = \left(\max_{i=1, \dots, N} z_{i1}, \max_{i=1, \dots, N} z_{i2}, \dots, \max_{i=1, \dots, N} z_{iM} \right) = (z_1^+, z_2^+, \dots, z_M^+). \quad (8)$$

W pracy do konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju wykorzystano modyfikację jednej z najstarszych metod wzorcowych Hellwiga (1968). Zatem dla każdego obiektu wyznacza się medianę wartości bezwzględnych różnic współrzędnych obiektu i wzorca:

$$d_i = \text{med}_{j=1, \dots, M} |z_{ij} - z_j^+|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Względny taksonomiczny miernik rozwoju jest wyznaczany następująco (Młodak, 2006):

$$\mu_i = 1 - \frac{d_i}{d_*}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

przy czym $d_* = med(\mathbf{d}) + 2,5 \cdot mad(\mathbf{d})$,
 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)$, $mad(\mathbf{d}) = \underset{i=1, \dots, N}{med} |d_i - med(\mathbf{d})|$.

Im większa wartość cechy syntetycznej tym wyższy jest poziom rozwoju obiektu (Wysocki, 2010).

4. MATERIAŁ BADAWCZY

Ocena warunków życia miała charakter przestrzenno-czasowy i dotyczyła powiatów ziemskich województwa zachodniopomorskiego w latach 2002–2015. W procesie operacjonalizacji pojęcia warunki życia dokonano doboru i selekcji wskaźników pozwalających na rozpoznanie wyróżnionych domen warunków życia mieszkańców powiatów ziemskich województwa zachodniopomorskiego. W myśl przyjętego podejścia identyfikacja warunków życia została przeprowadzona w ujęciu obiektywnym. W pracy przeprowadzono następujące etapy doboru wskaźników: wyodrębnienie domen (uwzględniono dostępność danych, szczególnie w roku 2004), określenie wag – wszystkim domenom nadano jednakowe wagi co wiąże się z uwzględnieniem takiej samej liczby cech, wyznaczenie współczynników zmienności i usunięcie tych wskaźników, które charakteryzują się niskim stopniem zmienności (wartość współczynnika zmienności wyniosła poniżej 10%), dokonanie, w każdej domenie i w każdym roku, metodą parametryczną Hellwiga (1981) doboru cech, wartość graniczną współczynnika korelacji przyjęto na poziomie 0,5, wyznaczenie ostatecznej listy cech uwzględniając podejście merytoryczne tak, aby otrzymane zbiory wskaźników dla każdego badanego roku, były takie same i każdy obszar był reprezentowany przez przynajmniej jedną cechę. W wyniku przedstawionego postępowania wytypowano po dwie cechy diagnostyczne z każdej domeny. Ostateczny zbiór cech diagnostycznych obejmował następujące domeny i wskaźniki:

- I. Demografia: X_1 – przyrost naturalny na 1000 ludności, X_2 – liczba zgonów niemowląt na 1000 urodzeń żywych.
- II. Stan i ochrona środowiska: X_3 – liczba ludności korzystającej z oczyszczalni ścieków w % ludności ogółem, X_4 – powierzchnia o szczególnych walorach przyrodniczych prawnie chroniona w ha na 1 ha powierzchni powiatu.
- III. Rynek pracy: X_5 – liczba kobiet w ogólnej liczbie pracujących (%), X_6 – liczba bezrobotnych w wieku poniżej 25 lat w liczbie bezrobotnych (%).

IV. Infrastruktura komunalna i mieszkania: X_7 – długość sieci kanalizacyjnej w km na 1 km² powierzchni powiatu, X_8 – przeciętna powierzchnia użytkowa mieszkania oddanego do użytkowania w m².

V. Edukacja, kultura i turystyka: X_9 – liczba dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1 tys. dzieci w wieku 3–5 lat, X_{10} – liczba turystów korzystających z noclegów na 1000 ludności.

VI. Ochrona zdrowia i bezpieczeństwo publiczne: X_{11} – liczba łóżek w szpitalach ogólnych na 10 tys. ludności, X_{12} – liczba przestępstw stwierdzonych w zakończonych postępowaniach przygotowawczych na 1000 ludności.

Wartości podstawowych parametrów opisowych cech przedstawiono w tabeli 2. Analizując wyniki zawarte w tabeli 2 można stwierdzić, iż cechy charakteryzują się silną zmiennością. Najsilniejsze zróżnicowanie zaobserwowano w przypadku przyrostu naturalnego na 1000 ludności, który uległ bardzo dużemu zwiększeniu w roku 2015. Taka sytuacja związana jest z występowaniem ujemnego przyrostu naturalnego na 1000 ludności w wielu powiatach (największy ujemny przyrost naturalny na 1000 ludności zanotowano w powiatach: kołobrzeskim, świdwińskim, myśliborskim i pyrzyckim). W roku 2015 tylko w pięciu powiatach zaobserwowano dodatnią wartość wskaźnika – najniższą dla powiatu stargardzkiego – 0,1, a najwyższą dla polickiego – 3,9. Przyrost naturalny na 1000 ludności charakteryzuje się ujemną średnią wartością w roku 2015, natomiast we wcześniejszych latach średnie wartości wskaźnika były dodatnie. Warto zauważyć, że średni odsetek bezrobotnych w wieku poniżej 25 lat w liczbie bezrobotnych w roku 2007 uległ zwiększeniu w porównaniu z rokiem 2004 o 140,7 p.p., natomiast w 2015 uległ zmniejszeniu o 79,3 p.p. w porównaniu z rokiem 2007. Zwiększała się także zmienność odsetka bezrobotnych w wieku poniżej 25 lat w liczbie bezrobotnych, z 31,4% w roku 2004 do 55% w roku 2015. Najniższą wartość cechy zaobserwowano w powiecie kamieńskim (2,3%) a najwyższą – choszczeńskim (24,9%). Pozytywną tendencję zaobserwowano w przypadku średniej liczby dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1 tys. dzieci w wieku 3–5 lat, która ulegała zwiększeniu. W roku 2007 odnotowano wzrost o 30,3% w porównaniu z rokiem 2004, natomiast w 2015 wzrost średniej liczby dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1 tys. dzieci w wieku 3–5 lat wyniósł 116,2% w odniesieniu do roku 2007. Upowszechnianie się wychowania przedszkolnego w Polsce jest zdecydowanie pozytywnym zjawiskiem. Jak dowodzi Heckmann (Krajowy Raport o Rozwoju Społecznym. Polska 2012), inwestycje w kapitał ludzki najmłodszych dają największy zwrot – są najbardziej opłacalne nie tylko dla samych dzieci, ale również dla społeczeństwa i przyczyniają się do rozwoju społeczeństwa opartego na wiedzy. W badanych latach zauważono także wzrost liczby turystów korzystających z noclegów na 1000 ludności. W roku 2015 wzrost ten wyniósł 44,6% w porównaniu z rokiem 2007. Najwyższą wartość wskaźnika odnotowano w powiatach: kołobrzeskim i kamieńskim, a najniższą – pyrzyckim i łobeskim.

Tabela 2. WARTOŚCI PODSTAWOWYCH PARAMETRÓW OPISOWYCH CECH

Cecha	Parametr														
	Średnia			Odchylenie standardowe			Współczynnik zmienności			Współczynnik asymetrii			Mediana Webera		
	2004	2007	2015	2004	2007	2015	2004	2007	2015	2004	2007	2015	2004	2007	2015
X_1	1,08	1,62	-0,14	1,03	0,92	1,32	95,42	56,80	912,67	0,74	1,42	1,52	1,15	1,94	-0,03
X_2	8,16	8,17	5,43	3,59	4,28	3,58	43,95	52,32	65,97	-0,14	1,31	1,50	0,16	0,16	0,29
X_3	69,12	70,85	77,48	9,48	8,31	9,68	13,72	11,72	12,50	-0,57	-0,67	-0,03	68,23	71,55	78,41
X_4	0,18	0,19	0,19	0,18	0,18	0,19	101,61	97,68	100,45	0,88	0,90	0,86	0,25	0,27	0,27
X_5	14,11	15,24	15,56	2,46	2,70	2,74	17,46	17,72	17,62	0,51	0,23	0,93	14,66	15,71	15,92
X_6	26,63	64,10	13,25	8,37	27,70	7,29	31,43	43,21	55,03	0,95	1,14	0,11	25,68	63,46	14,45
X_7	0,17	0,20	0,34	0,12	0,15	0,24	68,96	73,84	69,87	2,31	2,47	2,10	0,14	0,18	0,26
X_8	119,77	114,21	111,83	19,80	22,15	19,57	16,53	19,39	17,50	-0,38	-0,09	-0,07	117,50	113,71	118,46
X_9	246,89	321,83	695,83	54,96	58,27	51,41	22,26	18,11	7,39	0,30	0,48	0,87	256,62	333,59	691,72
X_{10}	904,94	926,04	1339,32	1347,39	1177,62	2033,02	148,89	127,17	151,80	1,96	1,76	2,07	272,33	354,97	340,18
X_{11}	31,98	30,98	34,25	18,69	19,23	22,40	58,42	62,09	65,40	0,75	0,88	0,45	28,23	33,32	32,88
X_{12}	38,70	35,95	21,01	18,48	16,97	5,59	47,74	47,20	26,62	3,65	3,20	0,74	0,03	0,03	0,05

Źródło: opracowanie własne

Pozytywną tendencję zaobserwowano także w przypadku liczby przestępstw stwierdzonych w zakończonych postępowaniach przygotowawczych na 1000 ludności. Ich liczba zmniejszała się w analizowanym okresie. W roku 2015 nastąpił spadek o 41,6% w porównaniu z rokiem 2007. Zmniejszyło się także zróżnicowanie powiatów ziemskich pod tym względem z 47,2% w roku 2007 do 26,6% w roku 2015.

Większość wskaźników charakteryzuje się silną lub bardzo silną asymetrią prawostronną. Najsilniejszą asymetrię zaobserwowano dla rozkładów cech: liczba turystów korzystających z noclegów na 1000 ludności oraz długość sieci kanalizacyjnej w km na 1 km² powierzchni powiatu. W przypadku cechy liczba zgonów niemowląt na 1000 urodzeń żywych zmieniał się kierunek asymetrii z ujemnej w roku 2004 na dodatnią w latach 2007 i 2015. Jest to zmiana o charakterze pozytywnym, ponieważ zmniejszała się liczba powiatów ziemskich, w których liczba zgonów niemowląt na 1000 urodzeń żywych przewyższała średnią wartość dla wszystkich powiatów. Tylko dla dwóch wskaźników: ludność korzystająca z oczyszczalni ścieków w % ludności ogółem i przeciętna powierzchnia użytkowa mieszkania oddanego do użytkowania w m² odnotowano, w każdym badanym roku, asymetrię lewostronną. W roku 2015 była to asymetria o bardzo słabej sile. Słabe natężenie oraz lewostronny kierunek asymetrii w odniesieniu do tych cech należy rozpatrywać jako sytuację pozytywną, która wskazuje na równomierną koncentrację wartości cech wokół średniej lub niewielką przewagę powiatów ziemskich, w których dominują wartości badanych cech wyższe od przeciętnej poziomu.

W pracy dokonano identyfikacji i oceny warunków życia mieszkańców powiatów ziemskich województwa zachodniopomorskiego w odniesieniu do zmian liczby ludności, jakie miały miejsce w latach 2002–2015. W badanym okresie w przypadku 10 powiatów zanotowano średni spadek liczby ludności, największy w powiecie świdwińskim – o 0,252%, a najmniejszy – w powiecie białogardzkim – o 0,001%. Natomiast 8 powiatów charakteryzowało się średnim wzrostem liczby ludności. Najwyższy średni wzrost odnotowano w powiecie polickim – o 1,848%, a najmniejszy – w gryfińskim – o 0,024%.

5. WYNIKI BADANIA

Na podstawie wyodrębnionego zbioru cech diagnostycznych określających warunki życia mieszkańców powiatów ziemskich województwa zachodniopomorskiego w latach: 2004, 2007 i 2015 dokonano liniowego porządkowania powiatów. Analizując zmiany liczby ludności w trzech okresach, tj. 2002–2004, 2005–2007 i 2008–2015, na podstawie średniego tempa zmian liczby ludności utworzono liniowe porządkowanie powiatów, które podzielono na dwa typy: progresywne (P) – wykazujące zwiększenie liczby mieszkańców w analizowanych okresach oraz regresywne (R) – czyli takie, w których zaobserwowano spadki

liczby ludności³. Wyniki odnoszące się do wartości mierników, pozycji w porządkowaniu pod względem warunków życia i zmian liczby ludności oraz typu powiatu ze względu na wzrost lub spadek liczby mieszkańców zaprezentowano w tabeli 3.

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 3 można zauważyć, iż jedenaście powiatów charakteryzowało się co najmniej średnimi warunkami życia w każdym roku, w tym dwa: goleniowski i policki odznaczały się warunkami życia na wysokim poziomie. Natomiast w pięciu powiatach zaobserwowano co najwyżej średnie warunki życia, a powiaty koszaliński i łobeski, w każdym roku, cechowały się niskimi warunkami życia ludności. Zauważa się także pewne prawidłowości w kształtowaniu się pozycji powiatów w porządkowaniach pod względem warunków życia ludności. Niektóre powiaty zajmowały w trzech badanych latach te same lub zbliżone miejsca, np. kamieński miejsce 14 w każdym roku, powiat koszaliński – 18 pozycja w latach 2004 i 2007 oraz 17 w roku 2015. Część badanych powiatów poprawiła swoją sytuację pod względem warunków życia, zajmując coraz lepsze pozycje w rankingach. Dotyczy to np. powiatu białogardzkiego, który w roku 2004 był na miejscu 10 a w roku 2015 na 7 oraz gryfińskiego czy wałeckiego. Kilka powiatów charakteryzuje się odwrotną sytuacją, tzn. w początkowym okresie badania zajmowały lepsze pozycje, a z czasem, w ostatnim roku badania, ich pozycje w rankingu obniżyły się (gryficki, pyrzycki, choszczeński). W przypadku tego ostatniego wystąpiła bardzo niekorzystna sytuacja, ponieważ powiat choszczeński zanotował największy spadek w rankingu, z pozycji pierwszej w roku 2004 na pozycję ostatnią w roku 2015. Tak duży spadek w rankingu związany był ze zmniejszającym się przyrostem naturalnym ludności, który początkowo kształtował się na poziomie 0,9 a w roku 2015 był ujemny i wyniósł $-0,2$ na 1000 ludności. Zwiększyła się znacząco liczba zgonów niemowląt na 1000 urodzeń żywych z 1,9 w roku 2004 do 4,2 w roku 2015. W całym badanym okresie dwa powiaty zachowały swoje dobre pozycje w porządkowaniach pod względem warunków życia: kołobrzeski i policki. Powiat kołobrzeski wyróżnił się spośród pozostałych powiatów, tym, że jako jedyny przez cały badany okres polepszał swoją pozycję w rankingach, z miejsca czwartego w roku 2004 i trzeciego w roku 2007 awansował na pozycję pierwszą w roku 2015. Analizując wartości cech dla powiatu kołobrzeskiego zauważa się poprawę w wielu domenach życia, szczególnie w zakresie ochrony środowiska, rynku pracy, infrastruktury komunalnej, edukacji, kultury i turystyki oraz bezpieczeństwa publicznego.

Badając liczbę ludności w powiatach ziemskich zaobserwowano, iż tylko w przypadku czterech powiatów odnotowano zwiększenie liczby ludności w każdym analizowanym roku. Taka sytuacja wystąpiła w powiatach: goleniowskim, kołobrzeskim, koszalińskim i polickim. W powiecie gryfińskim tylko w roku 2004 nastąpił spadek liczby ludności natomiast w następnych latach odnotowano

³ Podobne oznaczenia zostały przyjęte w pracy (Baran, Kopacz-Wyrwał, 2014).

wzrost liczby mieszkańców. W części powiatów (białogardzki, drawski, gryficki, pyrzycki, stargardzki i szczecinecki) dopiero w roku 2015 odnotowano zwiększenie liczby ludności. Natomiast w przypadku powiatów: choszczeńskiego, kamieńskiego, łobeskiego, myśliborskiego, sławieńskiego, świdwińskiego i wałeckiego w każdym badanym roku zanotowano spadek liczby ludności. Powiat policki charakteryzuje się najwyższym wzrostem liczby ludności w każdym badanym roku zaś w powiecie choszczeńskim zaobserwowano największe spadki liczby ludności w badanych latach. W roku 2015 w jedenastu powiatach nastąpił wzrost liczby ludności w porównaniu z rokiem 2007, w pozostałych siedmiu – spadek.

Pozycje zajmowane przez powiaty ziemskie w liniowym porządkowaniu pod względem warunków życia mieszkańców w roku 2004 i 2007 wykazują dość silne powiązanie, na co wskazuje wartość współczynnika korelacji rang Kendalla (0,673). Zależność pomiędzy pozycjami w rankingach w latach 2004 i 2015 oraz 2007 i 2015 była na umiarkowanym poziomie (0,333). Zauważono, że występują silne powiązania pomiędzy uporządkowaniami powiatów z uwzględnieniem zmiany liczby ludności. Najsilniej powiązane były pozycje w rankingach w latach 2007 i 2015 (0,594) oraz 2004 i 2015 (0,529). Słabszą zależność wykazywały porządkowania powiatów w latach 2004 i 2015 (0,386).

Analizując liczbę ludności w powiatach ziemskich w latach 2002–2015 wyodrębniono dwa typy powiatów: progresywne, dla których wskaźnik dynamiki liczby ludności wynosił 100% i więcej oraz regresywne z wartością wskaźnika dynamiki poniżej 100% (tab. 4).

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 4 można zauważyć, iż liczba powiatów typu regresywnego pod względem liczby ludności ulegała zmniejszeniu. W roku 2004 wynosiła 14 powiatów, zamieszkałych przez 75% ludności wszystkich powiatów ziemskich. W roku 2015 liczba powiatów typu regresywnego uległa zmniejszeniu do 7 z liczbą ludności stanowiącą 31% ludności powiatów ziemskich. Natomiast liczba powiatów typu progresywnego ulegała zwiększeniu, z 4 w roku 2004 do 11 w roku 2015. Zwiększała się także liczba ludności w powiatach typu progresywnego z 25% do 69% ludności zamieszkałej w powiatach ziemskich województwa zachodniopomorskiego.

Do powiatów, które w roku 2015 zmieniły typ z regresywnego, w latach 2004 i 2007, na progresywny w roku 2015 pod względem liczby ludności należały: białogardzki, drawski, gryficki, pyrzycki, stargardzki i szczecinecki. Są to powiaty leżące w sąsiedztwie dużych miast lub rozwijają funkcję turystyczną, wykorzystując swoje położenie geograficzne. Siedem powiatów (choszczeński, kamieński, łobeski, myśliborski, sławieński, świdwiński i wałecki) w każdym badanym roku charakteryzowało się spadkiem liczby ludności. Są to obszary o charakterze rolniczym, położone w peryferyjnych częściach województwa.

W tabeli 5 zaprezentowano typologię powiatów ziemskich ze względu na warunki życia i zmiany liczby ludności.

Tabela 3. WYNIKI LINIOWEGO PORZĄDKOWANIA POWIATÓW POD WZGLĘDEM WARUNKÓW ŻYCIA (WŻ) I ZMIAN LICZBY LUDNOŚCI (LUDN) W POWIATACH ZIEMSKICH WOJEWÓDZTWA ZACHODNIOPOMORSKIEGO W LATACH 2004, 2007, 2015 (POZ — POZYCJA, WSK — WSKAŹNIK, ZM — ZMIANA)

Powiat	2004						2007						2015					
	WŻ		Ludn		WŻ		Ludn		WŻ		Ludn		WŻ		Ludn			
	poz	stan	wsk	poz	zm	poz	stan	wsk	poz	zm	poz	stan	wsk	poz	zm			
białogardzki	10	W	99,87	11	R	8	Ś	99,95	7	R	7	W	100,05	10	P			
choszczeński	1	W	99,82	13	R	5	Ś	99,70	15	R	16	Ś	99,91	16	R			
drawski	11	Ś	99,73	16	R	11	Ś	99,64	17	R	3	W	100,04	11	P			
goleniowski	3	W	100,40	4	P	2	W	100,55	2	P	5	W	100,47	3	P			
grzyficki	7	W	99,92	8	R	12	N	99,88	9	R	10	Ś	100,14	6	P			
grzyfiński	16	N	99,83	12	R	13	N	100,05	5	P	11	Ś	100,07	9	P			
kamieński	14	Ś	99,97	6	R	14	Ś	99,83	11	R	14	Ś	99,95	15	R			
kolobrzegi	4	W	100,53	2	P	3	N	100,28	4	P	1	W	100,48	2	P			
koszaliński	18	N	100,52	3	P	18	N	100,35	3	P	17	N	100,28	4	P			
łobeski	17	N	99,75	15	R	17	Ś	99,82	12	R	18	N	99,83	18	R			
myśliborski	8	W	99,47	18	R	6	Ś	99,96	6	R	9	Ś	99,98	12	R			
policki	2	W	101,96	1	P	1	W	102,07	1	P	2	W	101,74	1	P			
pyrzycki	6	W	99,87	9	R	7	Ś	99,84	10	R	15	Ś	100,09	8	P			
ślawieński	12	Ś	99,95	7	R	4	Ś	99,73	14	R	13	Ś	99,97	13	R			
stargardzki	5	W	99,99	5	R	9	Ś	99,81	13	R	8	Ś	100,13	7	P			
szczecinecki	13	Ś	99,81	14	R	16	N	99,95	8	R	6	W	100,22	5	P			
świdwiński	15	Ś	99,61	17	R	15	N	99,55	18	R	12	Ś	99,85	17	R			
walecki	9	W	99,87	10	R	10	Ś	99,67	16	R	4	W	99,95	14	R			

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. WSKAŹNIKI DYNAMIKI I STRUKTURA POWIATÓW ORAZ LICZBY LUDNOŚCI

Typ powiatu	Liczba powiatów			Liczba ludności (tys.)			Wskaźnik dynamiki (%)			Struktura według liczby powiatów			Struktura według liczby ludności		
	2004	2007	2015	2004	2007	2015	2007	2015	2004	2007	2015	2004	2007	2015	
	Progresywny (100% i więcej) ...	4	5	11	280,2	369,7	794,5	131,3	214,9	22	28	61	25	33	69
Regresywny (poniżej 100%)	14	13	7	854,0	766,5	361,2	89,8	47,1	78	72	39	75	67	31	
Razem	18	18	18	1134,2	1136,2	1155,7	100,2	101,7	100	100	100	100	100	100	

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. TYPOLOGIA POWIATÓW ZE WZGLĘDU NA WARUNKI ŻYCIA I ZMIANY W LICZBIE LUDNOŚCI

Typ powiatu	Liczba powiatów			Liczba ludności (tys. osób)			Odsetek ludności		
	2004	2007	2015	2004	2007	2015	2004	2007	2015
	Progresywne i dobre	3	2	6	216,5	145,8	423,2	19,1	12,8
Progresywne i średnie	0	1	4	0,0	76,5	305,5	0,0	6,7	26,4
Progresywne i niskie	1	2	1	63,7	147,4	65,8	5,6	13,0	5,7
Regresywne i dobre	7	0	1	441,8	0,0	54,2	39,0	0,0	4,7
Regresywne i średnie	5	8	5	290,8	494,1	269,3	25,6	43,5	23,3
Regresywne i niskie	2	5	1	121,3	272,4	37,7	10,7	24,0	3,3
Razem	18	18	18	1134,1	1136,2	1155,7	100	100	100

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przeprowadzonego badania można stwierdzić, że zwiększała się liczba powiatów ziemskich, w których odnotowano wzrost liczby ludności (typ progresywny) i jednocześnie wystąpiły co najmniej średnie warunki życia. W roku 2015 sześć powiatów odznaczało się zwiększeniem liczby ludności i dobrymi warunkami życia. Należały do nich: białogardzki, drawski, goleniowski, kołobrzeski, policki i szczecinecki. W grupie tych powiatów odnotowano dodatni przyrost naturalny, wysoki odsetek ludności korzystającej z oczyszczalni ścieków i kobiet w ogólnej liczbie pracujących. Ponadto cechy z obszarów: infrastruktura komunalna i mieszkania, rynek pracy oraz edukacja, kultura i turystyka przyjmowały korzystne wartości z punktu widzenia warunków życia.

Klasa powiatów o średnich warunkach życia i zwiększającej się liczbie ludności obejmowała w roku 2015 cztery powiaty ziemskie: gryficki, gryfiński, pyrzycki i stargardzki. Wśród cech określających warunki życia mieszkańców na uwagę, ze względu na pozytywny wpływ na badaną kategorię, zasługują: niska liczba zgonów niemowląt na 1000 urodzeń żywych, przeciętna powierzchnia użytkowa mieszkania oddanego do użytkowania oraz liczba dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1 tys. dzieci w wieku 3–5 lat. Gorszą sytuację zaobserwowano w przypadku takich cech, jak: przyrost naturalny (ujemny), powierzchnia o szczególnych walorach przyrodniczych prawnie chroniona, odsetek bezrobotnych w wieku poniżej 25 lat w liczbie bezrobotnych, długość sieci kanalizacyjnej, turyści korzystający z noclegów na 1000 ludności oraz liczba łóżek w szpitalach ogólnych na 10 tys. ludności.

Tylko w jednym powiecie ziemskim – koszalińskim odnotowano wzrost liczby ludności i jednocześnie niskie warunki życia, w każdym badanym roku. Pomimo dodatniego, wysokiego przyrostu naturalnego większość pozostałych cech, np. liczba zgonów niemowląt na 1000 urodzeń żywych, odsetek ludności korzystającej z oczyszczalni ścieków i kobiet w ogólnej liczbie pracujących oraz liczby dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1 tys. dzieci w wieku 3–5 lat i łóżek w szpitalach ogólnych na 10 tys. ludności przyjmowała niekorzystne wartości z punktu widzenia warunków życia ludności.

We wszystkich powiatach określonych jako regresywne zaobserwowano ujemny przyrost naturalny na 1000 ludności a tym samym spadek liczby ludności. W roku 2015 zmniejszyła się liczba powiatów, z siedmiu w roku 2004, do jednego, w których wystąpiły dobre warunki życia ludności. Dotyczyło to powiatu waleckiego, gdzie zaobserwowano wysoki odsetek ludności korzystającej z oczyszczalni ścieków oraz dość dużą powierzchnię o szczególnych walorach przyrodniczych prawnie chronioną. W obszarze rynku pracy wystąpił najwyższy odsetek pracujących kobiet. Spośród trzech klas powiatów o zmniejszającej się liczbie ludności, w waleckim odnotowano najwyższą przeciętną powierzchnię użytkową mieszkania oddanego do użytkowania oraz najwyższą liczbę dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego. Ponadto obie cechy z domeny ochrona zdrowia i bezpieczeństwo publiczne kształtowały się na dobrym pozio-

mie z punktu widzenia warunków życia. Grupa powiatów o regresywnym charakterze pod względem liczby ludności i średnich warunkach życia obejmuje pięć powiatów ziemskich: choszczeński, kamieński, myśliborski, sławieński, świdwiński. Są to powiaty leżące głównie na peryferiach województwa, w których zaobserwowano wartości cech zbliżone do średniej dla wszystkich powiatów. W analizowanej klasie powiatów na uwagę zasługują cechy z obszaru edukacja i turystyka, które kształtowały się na dość wysokim poziomie.

Jedynie powiat łobeski w roku 2015 odnotował spadek liczby ludności i niskie warunki życia mieszkańców, które znalazły odzwierciedlenie w większości wartości cech z badanych domen życia. Wartości te kształtowały się na niekorzystnych poziomach z punktu widzenia warunków życia, np. tylko 60,3% ludności korzystała z oczyszczalni ścieków, odsetek pracujących kobiet i bezrobotnych w wieku poniżej 25 lat był wysoki, a cechy z zakresu infrastruktury przyjęły bardzo niskie wartości. Podobna sytuacja miała miejsce w obszarach edukacji i turystyki oraz ochrony zdrowia i bezpieczeństwa publicznego.

6. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonej oceny warunków życia w aspekcie zmian liczby ludności w powiatach ziemskich województwa zachodniopomorskiego można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Większość cech przyjętych w badaniu charakteryzuje się dużą zmiennością oraz co najmniej silną asymetrią. Z tego względu do identyfikacji warunków życia zastosowano liniowe porządkowanie obiektów oparte na podejściu pozycyjnym, wykorzystującym medianę Webera.
2. Powiaty ziemskie województwa zachodniopomorskiego w badanym okresie wykazują przestrzenne zróżnicowanie zarówno pod względem warunków życia, jak i zmian liczby ludności.
3. W przypadku dwunastu powiatów stwierdzono ten sam poziom lub poprawę warunków życia. W jedenastu powiatach zaobserwowano zwiększenie liczby ludności. Dla powiatów: białogardzkiego, drawskiego, gryfińskiego, kołobrzeskiego, polickiego i szczecińskiego odnotowano polepszenie warunków życia oraz zwiększenie liczby ludności.
4. W sześciu powiatach dostrzeżono pogorszenie warunków życia w ciągu badanego okresu. Zmniejszenie liczby ludności nastąpiło także w sześciu powiatach. Powiaty: choszczeński, kamieński, łobeski i myśliborski charakteryzują się obniżeniem poziomu warunków życia i jednocześnie spadkiem liczby ludności.
5. Jedynie w roku 2015 zauważono istotną korelację pomiędzy uporządkowaniami powiatów ziemskich ze względu na warunki życia oraz zmiany w liczbie ludności.

LITERATURA

- Bank Danych Lokalnych <https://bdl.stat.gov.pl/BDL/start> (dostęp 15.09.2017).
- Baran E., Kopacz-Wyrwał I., (2014), Poziom życia a procesy depopulacji na obszarach wiejskich południowo-wschodniej Polski, *Obszary wiejskie: wielofunkcyjność, migracje, nowe wizje rozwoju*. Studia KPZK PAN, 133, 168-194.
- Bedall F. K., Zimmerman H., (1979), The Mediancentre, *Applied Statistics*, 23, 325–328.
- Borys T., (1978), Metody normowania cech statystycznych w badaniach porównawczych, *Przegląd Statystyczny* 2, 227–239.
- Grabiński T., (1984), *Wielowymiarowa analiza porównawcza w badaniach dynamiki zjawisk ekonomicznych*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie, Seria specjalna: Monografie, 61, Kraków.
- Hellwig Z., (1968), Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju i strukturę wykwalifikowanych kadr, *Przegląd Statystyczny*, 4, 307–327.
- Hellwig Z., (1981), Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie w badaniach wielocechowych obiektów gospodarczych, w: Welfe W., (red.), *Metody i modele ekonomiczno-matematyczne w doskonaleniu zarządzania gospodarką socjalistyczną*, PWE, Warszawa, 46–68.
- Hodoly A., (1975), Spożycie i formy jego realizacji w rozwoju gospodarki społeczeństwa socjalistycznego, *Biblioteka IHW*, 118, Warszawa.
- Krajowy Raport o Rozwoju Społecznym. Polska 2012*, (2012), Rozwój regionalny i lokalny, United Nations Development Programme, Biuro Projektowe UNDP w Polsce.
- Lira J., Wagner W., Wysocki F., (2002), Mediana w zagadnieniach porządkowania obiektów wielocechowych, *Statystyka regionalna w służbie samorządu lokalnego i biznesu*, Internetowa Oficyna Wydawnicza Centrum Statystyki Regionalnej, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, 87–99.
- Luszniewicz A., (1972), *Statystyka poziomu życia ludności*, PWN, Warszawa.
- Młodak A., (2006), *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Difn, Warszawa.
- Młodak A., (2009), Historia problemu Webera, *Matematyka Stosowana*, 10/51.
- Młodak M., Józefowski T., Wawrowski Ł., (2016), Zastosowanie metod taksonomicznych w estymacji wskaźników ubóstwa, *Wiadomości Statystyczne*, 2, 1–24.
- Nowak E., (1990), *Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno – gospodarczych*, PWE, Warszawa.
- OECD, (2011), *Compendium of OECD Well-Being Indicators*, OECD Better Life Initiative, OECD Publications, Paris.
- Panek T., (2015), *Jakość życia gospodarstw domowych w Polsce w układzie wojewódzkim*, Instytut Statystyki i Demografii, 46, Warszawa.
- Podolec B., (2014), *Wybrane aspekty analizy warunków życia ludności w Polsce. Metody ilościowe w badaniach empirycznych*, Krakowskie Towarzystwo Edukacyjne sp. z o.o. – Oficyna Wydawnicza AFM, Kraków.
- Słaby T., (2004), Nowe ujęcie badań społecznych, *Nierówności społeczne a Wzrost Gospodarczy*, Warszawa, 57–66.
- Słaby T., (2007), Poziom i jakość życia, *Statystyka społeczna*, Warszawa, 99–130.
- Strahl D., (1990), *Metody programowania rozwoju społeczno-gospodarczego*, PWE, Warszawa.
- Tkocz M., Zuzańska-Żyśko E., (1996), Charakterystyka wielkich miast Polski, *Wiadomości Statystyczne*, nr 12.

- Walesiak M., (1993), Zagadnienie oceny podobieństwa zbioru obiektów w czasie w syntetycznych badaniach porównawczych, *Przegląd Statystyczny*, 40 (1), 95–102.
- Walesiak M., (2006), *Uogólniona miara odległości w statystycznej analizie wielowymiarowej*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Województwo zachodniopomorskie 2005 – podregiony, powiaty, gminy, (2006), Urząd Statystyczny w Szczecinie.
- Województwo zachodniopomorskie 2008 – podregiony, powiaty, gminy (2009), Urząd Statystyczny w Szczecinie.
- Województwo zachodniopomorskie 2016 – podregiony, powiaty, gminy (2015), Urząd Statystyczny w Szczecinie.
- Wysocki F., (2010), *Metody taksonomiczne w rozpoznawaniu typów ekonomicznych rolnictwa i obszarów wiejskich*, Wydawnictwo Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu.
- Zagroda A., (2016), Warunki, poziom i jakość życia w badaniu rozwoju społeczno-gospodarczego. Próba rozstrzygnięcia problemów definicyjnych, *Roczniki Teologiczne*, 63 (1), 69–77.

WARUNKI ŻYCIA W POWIATACH ZIEMSKICH WOJEWÓDZTWA ZACHODNIOPOMORSKIEGO W LATACH 2002–2015 W ŚWIETLE ZMIAN DEMOGRAFICZNYCH

Streszczenie

Celem badań była ocena warunków życia ludności województwa zachodniopomorskiego na tle zmian liczby ludności. Badanie dotyczyło powiatów ziemskich w latach 2002–2015. Ze względu na asymetrię większości cech do realizacji celu pracy wykorzystano liniowe porządkowanie obiektów, opartą na podejściu pozycyjnym z uwzględnieniem mediany Webera. Liniowe porządkowanie powiatów utworzono dla lat: 2004, 2007 i 2015 co wiązało się ze wstąpieniem Polski do UE oraz z zakończeniem pierwszego i drugiego okresu finansowania ze środków UE. Na podstawie przeprowadzonego badania, stwierdzono, że powiaty są silnie zróżnicowane przestrzennie pod względem warunków życia i zmian ludnościowych. W większości powiatów ziemskich nastąpiło zwiększenie liczby ludności i poprawa warunków życia. Ocena warunków życia mieszkańców powiatów ziemskich województwa zachodniopomorskiego została przedstawiona w sposób dynamiczny, w świetle zmian liczby ludności. Przedstawiono autorską propozycję wskaźników mierzących warunki życia w ujęciu lokalnym. Władze samorządowe mogą wykorzystać wyniki badania w podejmowaniu decyzji, dotyczących poprawy poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego w województwie.

Słowa kluczowe: warunki życia, zmiany liczby ludności, liniowe porządkowanie obiektów, mediana Webera

**LIVING CONDITIONS IN THE COUNTRIES
OF THE ZACHODNIOPOMORSKIE VOIVODESHIP
IN THE YEARS 2002–2015 IN THE LIGHT OF DEMOGRAPHIC CHANGES**

Abstract

The aim of the study was to assess the living conditions of the population of the West Pomeranian Voivodeship against the background of population changes. The study covered counties in the years 2002–2015. Linear ordering of objects with Weber median was used because of the asymmetry of most features. The linear ordering of counties was created in 2004, 2007 and 2015 years. The choice of years was related with the accession of Poland to the EU and the end of the first and second periods of EU funding. Based on the research conducted, it was found, that counties are strongly differentiated in terms of living conditions and population changes. In most of the poviats, the population has increased and living standards improved. Assessment of living conditions of the inhabitants of the West Pomeranian Voivodeship counties was presented in a dynamic way, considering population change. An original proposition of indicators measuring living conditions in a local approach was presented. Local authorities can take advantage of research results in decision making concerning improvement of social and economic development level in Voivodeship.

Keywords: living conditions, population changes, linear ordering of objects, Weber median

Krzysztof JAJUGA¹
Barbara PAWEŁEK²
Marek WALESIAK³

SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie z XXVI konferencji naukowej nt. „Klasyfikacja i Analiza Danych – Teoria i Zastosowania”

W dniach 23–25 października 2017 roku na Uniwersytecie Ekonomicznym w Krakowie odbyła się XXVI Konferencja Naukowa Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS (XXXI Konferencja Taksonomiczna) nt. „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania”, zorganizowana przez Sekcję Klasyfikacji i Analizy Danych Polskiego Towarzystwa Statystycznego oraz Katedrę Statystyki Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego Konferencji był prof. dr hab. Józef Pociecha, zastępcą przewodniczącego prof. dr hab. Andrzej Sokołowski, sekretarzem naukowym prof. UEK dr hab. Barbara Pawełek, a członkiem dr Sabina Denkowska. Sekretarzami Komitetu Organizacyjnego byli mgr Mateusz Baryła, mgr Joanna Burkot i mgr Katarzyna Wójcik.

Zakres tematyczny konferencji obejmował zagadnienia:

- a) teoria (taksonomia, analiza dyskryminacyjna, metody porządkowania liniowego, metody statystycznej analizy wielowymiarowej, metody analizy zmiennych ciągłych, metody analizy zmiennych dyskretnych, metody analizy danych symbolicznych, metody graficzne),
- b) zastosowania (analiza danych finansowych, analiza danych marketingowych, analiza danych przestrzennych, inne zastosowania analizy danych – medycyna, psychologia, archeologia, itd., aplikacje komputerowe metod statystycznych).

¹ Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Katedra Inwestycji Finansowych i Zarządzania Ryzykiem, ul. Komandorska 118/120, 53–345 Wrocław, Polska.

² Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Rakowicka 27, 31–510 Kraków, Polska.

³ Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii, Zarządzania i Turystyki, Katedra Ekonometrii i Informatyki, ul. Nowowiejska 3, 58–500 Jelenia Góra, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: marek.walesiak@ue.wroc.pl.

Zasadniczym celem konferencji SKAD była prezentacja osiągnięć i wymiana doświadczeń z zakresu teoretycznych i aplikacyjnych zagadnień klasyfikacji i analizy danych. Konferencja stanowi coroczne forum służące podsumowaniu obecnego stanu wiedzy, przedstawieniu i promocji dokonań nowatorskich oraz wskazaniu kierunków dalszych prac i badań.

W konferencji wzięły udział 72 osoby. Byli to pracownicy oraz doktoranci następujących uczelni i instytucji: Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, Instytutu Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej, Politechniki Białostockiej, Politechniki Opolskiej, Politechniki Rzeszowskiej, Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Uniwersytetu Gdańskiego, Uniwersytetu Łódzkiego, Uniwersytetu Medycznego im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu, Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu, Uniwersytetu Szczecińskiego, Uniwersytetu w Białymstoku, Wyższej Szkoły Bankowej w Toruniu, Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Kaliszu, a także przedstawiciele Głównego Urzędu Statystycznego, Urzędu Statystycznego w Poznaniu, StatSoft Polska Sp. z o.o., PBS Sp. z o.o., Miejskiego Przedsiębiorstwa Oczyszczania Sp. z o.o. w Krakowie.

W trakcie dwóch sesji plenarnych oraz dziesięciu sesji równoległych wygłoszono 43 referaty poświęcone aspektom teoretycznym i aplikacyjnym zagadnienia klasyfikacji i analizy danych. Odbyła się również sesja plakatowa, na której zaprezentowano 18 plakatów. Obradom w poszczególnych sesjach konferencji przewodniczyli profesorowie: Krzysztof Jajuga, Andrzej Sokołowski, Eugeniusz Gatnar, Małgorzata Rószkiewicz, Mirosław Krzyśko, Marek Walesiak, Feliks Wysocki, Krzysztof Najman, Danuta Strahl, Andrzej Bąk, Adam Sagan, Józef Pociecha.

Teksty referatów przygotowane w formie recenzowanych artykułów naukowych stanowią zawartość przygotowywanej do druku publikacji z serii Taksonomia nr 30 i 31 (w ramach Prac Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu).

Zaprezentowano następujące referaty (zestawienie uwzględnia, będące w programie konferencji a niezaprezentowane z obiektywnych przyczyn, dwa referaty K. Szopik-Depczyńskiej i K. Cheby oraz B. Basiury):

Andrzej Sokołowski, Małgorzata Markowska, Agnieszka Rygiel, Nieliniowe dynamiczne skalowanie wielowymiarowe

Eugeniusz Gatnar, Statystyczne modele pomiaru inflacji

Dominik Rozkrut, Regionalne zróżnicowanie innowacyjności sektora publicznego w Polsce

Grażyna Dehnel, Elżbieta Gołata, Marek Obrębalski, Marek Walesiak, Ocena zmian w procesie starzenia się ludności w regionach krajów Grupy Wyszehradzkiej z zastosowaniem wybranych metod statystycznej analizy wielowymiarowej

- Barbara Pawełek, Józef Pociecha, Mateusz Baryła, Ocena przydatności wskaźników finansowych dla prognozowania bankructwa przedsiębiorstw w zależności od rozmiaru obiektów
- Izabela Kurzawa, Aleksandra Łuczak, Feliks Wysocki, Ocena poziomu rozwoju zrównoważonego państw Unii Europejskiej z wykorzystaniem wielowymiarowej analizy porównawczej
- Jerzy Korzeniewski, Selekcja zmiennych w analizie skupień marketingowych zbiorów danych binarnych
- Katarzyna Szopik-Depczyńska, Katarzyna Cheba, Zastosowanie taksonomii relatywnej do badania zdolności konkurencyjnej krajów Unii Europejskiej
- Beata Basiura, Porównanie grupowania szeregów czasowych z wykorzystaniem modelu Copula-GARCH
- Jacek Biątek, Elżbieta Roszko-Wójtowicz, Ocena innowacyjności krajów UE w ujęciu wielowymiarowym
- Robert Pietrzykowski, Klasyfikacja obiektów w ujęciu czasowo-przestrzennym z zastosowaniem analizy funkcjonalnej
- Adam Sagan, Mariusz Łapczyński, Modele hybrydowe SEM-Tree w badaniach preferencji członków polskich gospodarstw domowych
- Marcin Salamaga, Analiza skłonności do podejmowania BIZ przez polskie firmy z wykorzystaniem modeli logitowych
- Aleksandra Pawłowska, Wpływ wybranych metryk na ocenę efektu działań polityki rolnej
- Beata Bieszk-Stolorz, Badanie czasu trwania w bezrobociu z wykorzystaniem modeli regresji dla zdarzeń powtarzających się
- Joanna Landmesser, Dekompozycja nierówności płacowych w Polsce za pomocą metod bazujących na konstrukcji rozkładów warunkowych
- Romana Głowicka-Wołoszyn, Feliks Wysocki, Problem identyfikacji poziomów rozwoju w zagadnieniu konstrukcji cechy syntetycznej
- Barbara Więckowska, Rozwój geoprzestrzennych metod statystycznych wykorzystywanych w epidemiologii poprzez rozwój polskiego programu PQScut
- Dariusz Kacprzak, Metoda FTOPSIS oparta na skierowanych liczbach rozmytych z obiektywnymi wagami
- Kamila Migdał-Najman, Krzysztof Najman, Dirty Data – analiza, zapobieganie, oczyszczanie zbioru Big Data
- Gregory Kersten, Ewa Roszkowska, Tomasz Wachowicz, Wpływ błędów przetwarzania informacji w systemach wspomaganie negocjacji na porozumienie końcowe
- Kamila Migdał-Najman, Krzysztof Najman, Samouczące się sieci neuronowe w grupowaniu danych BIG DATA

- Marzena Filipowicz-Chomko, Ewa Roszkowska, Tomasz Wachowicz, Ocena akceptowalności wybranych metod wielokryterialnych – badanie eksperymentalne
- Barbara Batóg, Jacek Batóg, Regionalna efektywność wykorzystania czynników produkcji: analiza i klasyfikacja
- Michał Trzęsiok, Wzmacnianie zdolności predykcyjnych modeli dyskryminacyjnych przez wyodrębnianie zmiennych objaśniających z sieci neuronowych
- Justyna Brzezińska, Aneta Rybicka, Marcin Pełka, Wielowymiarowa analiza statystyczna zanieczyszczenia powietrza w krajach Unii Europejskiej
- Dorota Rozmus, Wpływ redukcji liczby zmiennych na stabilność grupowania
- Paweł Lula, Renata Oczkowska, Sylwia Wiśniewska, Identyfikacja oczekiwań pracodawców dotyczących kompetencji zatrudnianych pracowników na podstawie eksploracyjnej analizy ofert pracy
- Iwona Markowicz, Modelowanie trwania firm powstałych w Szczecinie w latach 1990–2013
- Marcin Pełka, Podejście wielomodelowe analizy danych symbolicznych w ocenie zdolności kredytowej osób fizycznych
- Iwona Markowicz, Artur Mikulec, Trwanie przedsiębiorstw w Łodzi i Szczecinie – analiza porównawcza
- Mateusz Baryła, Analiza wskazań wybranych mierników służących ocenie zgodności danych z prawem Benforda – przypadek pierwszej cyfry znaczącej
- Mariusz Kubus, Eliminacja zmiennych z wykorzystaniem marginesu
- Katarzyna Frodyma, Monika Papież, Sławomir Śmiech, Badanie efektywności energii wiatrowej w krajach Unii Europejskiej z wykorzystaniem metody DEA
- Tomasz Górecki, Mirosław Krzyśko, Waldemar Wołyński, Wybór zmiennych w klasyfikacji dla wielowymiarowych danych funkcjonalnych
- Jadwiga Kostrzewska, Maciej Kostrzewski, Wybrane metody wykrywania skoków cen na rynku energii
- Stanisław Wanat, Taryfikacja w ubezpieczeniach z wykorzystaniem analizy skupień
- Justyna Brzezińska, Statystyczna analiza ubóstwa ekonomicznego w Polsce
- Marek Sobolewski, Porządkowanie liniowe z uwzględnieniem relacji przestrzennych
- Hanna Dudek, Analiza wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej w regionach EU za pomocą regresji dla zmiennej frakcyjnej
- Tomasz Bartłomowicz, Analiza DROP kursów akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie
- Marta Dziechciarz-Duda, Analiza zasobności materialnej gospodarstw domowych w świetle ich potrzeb

Joanna Trzęsiok, Społeczeństwo obywatelskie – analiza świadomości i postaw Polaków z wykorzystaniem wielowymiarowych metod statystycznych

Miroslaw Krzyśko, Wojciech Łukaszonek, Waldemar Wołyński, Analiza składowych głównych dla danych czasowo-przestrzennych

Andrzej Bąk, Analiza porównawcza wybranych metod porządkowania liniowego na podstawie danych empirycznych i symulacyjnych

W trakcie sesji plakatowej zaprezentowano 18 plakatów przygotowanych przez następujących autorów: Sabina Denkowska; Iwona Foryś i Ewa Putek-Szeląg; Anna Jędrzychowska, Radosław Pietrzyk i Paweł Rokita; Tomasz Klimanek i Marcin Szymkowiak; Anna Król; Anna Król i Marta Targaszewska; Aleksandra Łuczak i Izabela Kurzawa; Izabela Miechowicz i Anna Sowińska; Artur Mikulec; Artur Mikulec i Małgorzata Misztal; Małgorzata Misztal; Małgorzata Rószkiewicz; Adam Sagan, Justyna Brzezińska i Aneta Rybicka; Elżbieta Sobczak; Anna Sowińska i Izabela Miechowicz; Marcin Szymkowiak i Tomasz Klimanek; Kamila Trzcńska; Elżbieta Zalewska.

W drugim dniu konferencji miało miejsce posiedzenie członków Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych Polskiego Towarzystwa Statystycznego, któremu przewodniczył prof. dr hab. Józef Pociecha. Ustalono plan przebiegu zebrania obejmujący następujące punkty:

- A. Sprawozdanie z działalności Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS.
- B. Informacje dotyczące planowanych konferencji krajowych i zagranicznych.
- C. Organizacja konferencji SKAD PTS w kolejnych latach.
- D. Wybór reprezentanta Sekcji SKAD PTS w IFCS Council, na kadencję 2018–2021.

Prof. dr hab. Józef Pociecha otworzył posiedzenie Sekcji SKAD PTS.

Sprawozdanie z działalności Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS przedstawiła sekretarz naukowej Sekcji dr hab. Barbara Pawełek, prof. nadzw. UEK. Poinformowała, że obecnie Sekcja liczy 236 członków. Przypomniała, że na stronie internetowej Sekcji znajduje się regulamin, a także deklaracja członkowska. Poinformowała, że zostały opublikowane zeszyty z serii „Taksonomia” nr 28 i 29 (PN UE we Wrocławiu nr 468 i 469). W „Przeglądzie Statystycznym” (zeszyt 1/2017) ukazało się sprawozdanie z ubiegłorocznej konferencji SKAD, która odbyła się w miejscowości Słok k. Bełchatowa, w dniach 19–21 września 2016 r. Prof. Barbara Pawełek przedstawiła informacje dotyczące działalności międzynarodowej oraz udziału w ważnych konferencjach członków SKAD.

Kolejny punkt posiedzenia Sekcji obejmował zapowiedzi najbliższych konferencji krajowych i zagranicznych, których tematyka jest zgodna z profilem Sekcji. Prof. dr hab. Józef Pociecha poinformował o dwóch wybranych konferencjach krajowych (XXXVI Konferencja Naukowa „Multivariate Statistical Analysis MSA 2017”, Łódź, 5–7 listopada 2017 r.; XII Międzynarodowa Konferencja Naukowa im. Profesora Aleksandra Zeliasia nt. „Modelowanie i prognozowanie zjawisk społeczno-gospodarczych”, Zakopane, 8–11 maja 2018 r.) oraz o konferencji zagra-

nicznej „European Conference on Data Analysis”, która odbędzie się w Paderborn (Niemcy) w dniach 4–6 lipca 2018 roku.

W następnym punkcie posiedzenia podjęto kwestię organizacji kolejnych konferencji SKAD. SKAD 2018 zorganizuje Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu z Wyższą Szkołą Bankową w Toruniu. Konferencja odbędzie się w dniach 10–12 września 2018 roku w Ciechocinku. Organizacji konferencji SKAD 2019 podejmie się Uniwersytet Szczeciński, a w roku 2020 – Uniwersytet Gdański.

W kolejnej części zebrania dokonano wyboru reprezentanta Sekcji SKAD PTS w IFCS Council, na kadencję 2018–2021. Powołano Komisję Skrutacyjną w składzie: prof. dr hab. Józef Dziechciarz, dr Sabina Denkowska, mgr Katarzyna Wójcik. Profesor Józef Dziechciarz poprosił zebranych o proponowanie kandydatur. Prof. Danuta Strahl zgłosiła kandydaturę Krzysztofa Jajugi, który wyraził zgodę na kandydowanie. Nie było więcej zgłoszeń. Komisja Skrutacyjna przeprowadziła głosowanie tajne. W głosowaniu uczestniczyło 37 członków Sekcji (oddano 37 głosów ważnych). Profesor Krzysztof Jajuga uzyskał 37 głosów na „tak”.

Prof. Józef Pocięcha zamknął posiedzenie Sekcji SKAD.

W ostatnim dniu konferencji ogłoszono wyniki konkursu dla Autorów trzech najlepszych referatów i plakatów zaprezentowanych na Konferencji SKAD 2017 przez młodych pracowników nauki (z tytułem magistra lub stopniem doktora). Nagrody pieniężne w Konkursie na sumę 1.500 zł ufundowała firma StatSoft Polska. Decyzję o przyznaniu nagród oraz kategorii nagrody na podstawie zaprezentowanego referatu lub plakatu, z uwzględnieniem treści i formy prezentacji, podjęło Jury Konkursu w drodze głosowania. W skład Jury weszli obecni na konferencji SKAD 2017 członkowie Komitetu Naukowego. W wyniku decyzji Jury Konkursu przyznało trzy równorzędne nagrody po 500 zł dla następujących osób: mgr Mateusz Baryła, dr Artur Mikulec, dr Marcin Pełka.

Dyplomy laureatom Konkursu wręczył dr Janusz Wątroba z firmy StatSoft Polska.

Beata BIESZK-STOLORZ¹
Iwona MARKOWICZ²

Sprawozdanie z XVIII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej „Mikroekonometria w teorii i praktyce”

W dniach 7–9 września 2017 roku w Pogorzeliczy odbyła się XVIII Ogólnopolska Konferencja Naukowa „Mikroekonometria w teorii i praktyce”, zorganizowana przez Instytut Ekonometrii i Statystyki Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego, Instytut Analiz, Diagnoz i Prognoz Gospodarczych w Szczecinie oraz Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk. Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego konferencji był prof. dr hab. Józef Hozer, sekretarzem naukowym dr hab. prof. US Iwona Markowicz, a sekretarzami organizacyjnymi dr hab. Beata Bieszk-Stolorz i dr Anna Gdakowicz. Projekt był realizowany wspólnie z Narodowym Bankiem Polskim w ramach edukacji ekonomicznej.

Konferencja objęta została patronatem honorowym Rektora Uniwersytetu Szczecińskiego prof. Edwarda Włodarczyka, Dziekana WNEiZ Uniwersytetu Szczecińskiego prof. Waldemara Tarczyńskiego, Prezesa Głównego Urzędu Statystycznego dra Dominika Rozkruta oraz Marszałka Województwa Zachodniopomorskiego Olgierda Geblewicza i Starosty Powiatu Gryfickiego Kazimierza Sacia.

Tematyka konferencji objęła modelowanie procesów gospodarczych w teorii i praktyce m.in. w takich obszarach jak: metody statystyczno-ekonometryczne, działalność podmiotów gospodarczych, sektor MSP, badanie gospodarstw domowych, innowacyjność przedsiębiorstw, rynek nieruchomości, rynek pracy, rynek ubezpieczeń, rynek kapitałowy, procesy demograficzne, analizy regionalne, ekonomia behawioralna.

Celem konferencji była wymiana doświadczeń naukowych dotyczących zastosowania metod ilościowych do badania zjawisk ekonomiczno-społecznych oraz integracja środowiska naukowego w Polsce. Dużym osiągnięciem był udział

¹ Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Katedra Badań Operacyjnych i Zastosowań Matematyki w Ekonomii, ul. Mickiewicza 64, 71–101 Szczecin, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: beatus@wneiz.pl.

² Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Mickiewicza 64, 71–101 Szczecin, Polska.

w konferencji emerytowanych profesorów: prof. dr hab. Stanisławy Bartosiewicz i prof. dr hab. Teodora Kulawczuka. Swoją obecnością zaszczylicili konferencję przedstawiciele Komitetu Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk: prof. dr hab. Krzysztof Jajuga, prof. dr hab. Waldemar Tarczyński, dr hab. prof. US Jacek Batóg, dr hab. prof. UG Paweł Miłobędzki i dr Dominik Rozkrut (Prezes GUS) oraz członek Komitetu Nauk Demograficznych – dr Magdalena Mojsiewicz.

W konferencji uczestniczyło 80 osób: 79 naukowców z Polski i jeden gość z zagranicy. Byli to przedstawiciele znaczących ośrodków naukowych oraz przedsiębiorców zainteresowanych aplikacjami metod ilościowych w praktyce zawodowej. Reprezentowali oni następujące ośrodki naukowe: Akademię Górniczo-Hutniczą im. Stanisława Staszica w Krakowie, Akademię im. Jakuba z Paradyża w Gorzowie Wielkopolskim, Państwową Wyższą Szkołę Techniczno-Ekonomiczną w Jarosławiu, Politechnikę Częstochowską, Politechnikę Gdańską, Politechnikę Koszalińską, Politechnikę Lubelską, Politechnikę Opolską, Politechnikę Wrocławską, Szkołę Główną Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Szkołę Główną Handlową w Warszawie, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Uniwersytet Gdański, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, Uniwersytet Szczeciński, Uniwersytet Warszawski, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Wyższą Szkołę Bankową we Wrocławiu, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, a także Główny Urząd Statystyczny, Urząd Statystyczny w Szczecinie, Urząd Statystyczny we Wrocławiu, Zakład Ubezpieczeń Społecznych, Urząd Miejski w Gryficach, ARCHICE Sp. z o. o. Spółka Komandytowa. Uczestnik z zagranicy – prof. dr Wolfgang K. Härdle – reprezentował Humboldt-Universität w Berlinie.

W trakcie konferencji na pięciu sesjach plenarnych i jednej plakatowej zaprezentowano 65 prac naukowych w dziedzinie ekonomii. Obradom w poszczególnych sesjach konferencji przewodniczyli: prof. dr hab. Teodor Kulawczuk, prof. dr hab. Krzysztof Jajuga, dr hab. Jerzy Czesław Ossowski, prof. dr hab. Jerzy W. Wiśniewski oraz prof. dr hab. Edward Nowak. Poniżej przedstawiono (w porządku alfabetycznym) autorów oraz tytuły zaprezentowanych podczas konferencji prac naukowych:

Paweł Baran, Wpływ wag kryteriów oceny Lokalnych Strategii Rozwoju na ranking

Paweł Baran, Izabela Szamrej-Baran, Trzy wymiary ubóstwa i ich wzajemne interakcje. Wskaźniki Strategii Europa 2020

Stanisława Bartosiewicz, Elżbieta Stańczyk, Wybrane aspekty sytuacji społeczno-gospodarczej ściany wschodniej w porównaniu z resztą Polski w latach 2004–2016, cz. IV Przedsiębiorczość

Jacek Batóg, Efektywność ekonomiczna w mikro skali – wnioski z badań

Barbara Batóg, Katarzyna Wawrzyniak, Globalne i lokalne centra rozwoju w województwie zachodniopomorskim – ujęcie dynamiczne

- Kamila Bednarz-Okrzyńska, Zastosowanie przybliżonej metody estymacji parametrów trendu wykładniczego do celów prognostycznych
- Karolina Białek, Determinanty cen akcji spółek z sektora przemysłowego notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie
- Beata Bieszk-Stolorz, Wykorzystanie testu Graya do oceny wpływu płci na formę wyjścia z bezrobocia
- Beata Bieszk-Stolorz, Krzysztof Dmytrów, Wykorzystanie uogólnionej miary odległości do klasyfikacji województw według efektywności form aktywizacji zawodowej
- Małgorzata Blaszcze, Rynek nieruchomości rolnych na obszarach chronionych
- Katarzyna Cheba, Iwona Bąk, Analiza trendów rozwojowych krajów członkowskich Unii Europejskiej w obszarze zrównoważonego rozwoju
- Joanna Cymerman, Wojciech Cymerman, Przestrzenne zróżnicowanie wrażliwości systemu dochodów gmin z rynku nieruchomości na zmiany koniunktury gospodarczej w Polsce
- Agnieszka Czajka, Magdalena Lazarek-Janowska, Analiza cen na wtórnym rynku nieruchomości mieszkaniowych
- Leszek Dawid, Analiza kompletności danych z rejestru cen wykorzystywanych do wyceny nieruchomości na przykładzie powiatu koszalińskiego w latach 2010–2016
- Janusz Andrzej Dąbrowski, Demografia jako istotna zmienna niezależna w krótkoterminowej prognozie cen nieruchomości
- Iwona Dittmann, Rozkłady nadwyżkowych stóp zwrotu z udziałowych funduszy inwestycyjnych. Ocena historycznej premii za ryzyko
- Krzysztof Dmytrów, Wpływ wag w metodach TOPSIS i TMAL na długość czasu kompletacji produktów – analiza symulacyjna
- Mariusz Doszyń, Krzysztof Heberlein, Próba modelowania przestrzennych czynników wzrostu gospodarczego w podregionach w Polsce w 2012 roku
- Michał Dudka, Uwarunkowania prawne i ekonomiczne wprowadzenia funduszy typu REIT w Polsce
- Iwona Foryś, Dylematy starzejącego się społeczeństwa w aspekcie warunków mieszkaniowych
- Anna Gdakowicz, Ewa Putek-Szeląg, Preferencje mieszkaniowe studentów – badanie ankietowe
- Sebastian Gnat, Badanie prawdopodobieństwa zwiększenia obciążeń podatkowych działek gruntu w wyniku wprowadzenia podatku ad valorem z wykorzystaniem modeli logitowych
- Stefan Grzesiak, Pomiar i próba modelowania skali wahań produkcji w przedsiębiorstwie – uwagi teoretyczne

- Paula Halik, Marta Hozer-Koćmiel, Anna Sobolewska, Ocena wpływu kryzysu ekonomicznego na zmiany w strukturze zatrudnienia kobiet w Europie
- Józef Hozer, Quantum Satis
- Agnieszka Huterska, Ewa Zdunek-Rosa, Zastosowanie modeli panelowych do oceny wpływu wybranych czynników na rozwarstwienie dochodowe gospodarstw domowych w Polsce
- Krzysztof Jajuga, Nowe wyzwania w inwestycjach na rynkach finansowych
- Rafał Jankowski, Modelowanie ekonometryczne popytu na energię z wykorzystaniem danych panelowych
- Kamil Jodź, Kalkulacja składki ubezpieczeniowej w oparciu o kohortowe tablice trwania życia
- Wolfgang K. Härdle, Alona Zharova, Andrija Mihoci, Academic Ranking Scales in Economics: Prediction and Imputation
- Sebastian Kokot, Mariusz Doszyń, Ocena hedonicznych indeksów cen nieruchomości publikowanych przez NBP
- Henryk Kowgier, Problem czasowej emigracji Polaków za granicę w latach 2004–2015
- Wojciech Kuźmiński, Społeczno-gospodarcze uwarunkowania rozwoju rolnictwa na Pomorzu w pierwszych dekadach XX wieku – ujęcie statystyczne
- Dawid Lahutta, Badanie i pomiar poziomu przedsiębiorczości w aspekcie zakładania i prowadzenia mikroprzedsiębiorstwa wśród studentów kierunków ekonomicznych lubelskich uczelni wyższych
- Joanna Landmesser, Wykorzystanie modeli hazardu do analizy nierówności płacowych w Polsce
- Magdalena Lazarek-Janowska, Krzysztof Stępniewski, Jan Jarmusz, Rola sektora MSP w rozwoju energetyki odnawialnej
- Łukasz Mach, Studencki rynek najmu mieszkań – pomiar i analiza preferencji mieszkaniowych
- Szymon Wojciech Machała, Preferencje studentów w zakresie wyboru miejsca zamieszkania w trakcie studiów
- Iwona Markowicz, Grupowanie powiatów województwa zachodniopomorskiego według modelu trwania firm
- Aleksandra Matuszewska-Janica, Różnice w płacach kobiet i mężczyzn w sektorze edukacyjnym w Polsce i wybranych państwach UE
- Paweł Miłobędzki, Sabina Nowak, Składowe spredu bid-ask na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A.
- Magdalena Mojsiewicz, Statystyki urodzeń w Polsce
- Radosław Murkowski, Zastępowalność pokoleń w Europie
- Joanna Muszyńska, Ewa Wędrowska, Jarosław Oczki, Konwergencja poziomu i rozkładu dochodu gospodarstw domowych krajów Unii Europejskiej

- Edward Nowak, Mikroekonometria i rachunkowość empiryczna
- Marek Ogryzek, Parametryczna ocena jakości estymacji
- Jerzy Czesław Ossowski, Model korekty błędem i jego funkcja trendu przełącznikowego. Symulacja i interpretacja
- Małgorzata Podogrodzka, Sytuacja na rynku pracy a decyzja o zawarciu małżeństwa w Polsce
- Jan Purczyński, Miary dopasowania modeli z binarną zmienną objaśnianą uwzględniające heteroskedastyczność składnika losowego
- Ewa Putek-Szeląg, Różnice i podobieństwa w podejściu do instrumentów marketingu zrównoważonego MSP działających w sektorze food&drink w Polsce i wybranych krajach
- Dominik Rozkrut, Wykorzystanie danych administracyjnych w spisie powszechnym w 2021 roku
- Monika Rozkrut, Procesy starzenia się społeczeństwa a rozwój gospodarki cyfrowej
- Teodor Skotarczak, Rynek nieruchomości rolnych po regulacji majowej 2016 roku
- Teodor Skotarczak, Małgorzata Błaszke, Mieszkania spółdzielcze na rynku nieruchomości
- Antoni Smoluk, Profesor Zbigniew Pawłowski – wspomnienie profesora Smoluka
- Marek Szajt, Marcin Zawada, Rozwój ruchu turystycznego w regionach Unii Europejskiej w latach 2000–2015 – analiza przestrzenno-czasowa
- Małgorzata Szczyt, Decyzje podejmowane na edukacyjnej i zawodowej ścieżce życiowej i ich wpływ na ocenę jakości życia
- Beata Śpiewak, Zastosowanie wybranych metod estymacji odpornej: Hubera i Baardy'go w modelowaniu rynku nieruchomości
- Monika Śpiewak-Szyjka, Budżet domowy seniora
- Małgorzata Tarczyńska-Łuniewska, Analiza rynku kapitałowego z punktu widzenia wybranych czynników
- Ewa Wędrowska, Joanna Muszyńska, Jarosław Oczuki, Dekompozycja nierówności dochodowych polskich rodzin
- Magdalena Węglarz, Edyta Ropuszyńska-Surma, Identyfikacja czynników wpływających na przyszłych prosumentów
- Jerzy W. Wiśniewski, Prognozowanie z modelu ekonometrycznego o zamkniętym cyklu powiązań
- Marcin Zawada, Marek Szajt, Wykorzystanie narzędzi statystyczno-ekonometrycznych w analizie stanu zanieczyszczenia powietrza na przykładzie Częstochowy

Ewa Zdunek-Rosa, Agnieszka Huterska, Wykorzystanie modeli zmiennych jakościowych do oceny kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw z sektora spożywczego.

W dniu 8 września 2017 roku odbyła się sesja plakatu, podczas której przeprowadzono konkurs na najciekawsze postery. Postery oceniała Komisja Konkursowa w następującym składzie: prof. dr hab. Krzysztof Jajuga, dr hab. prof. UG Paweł Miłobędzki, dr Dominik Rozkrut. Spośród zaprezentowanych posterów, ocenianych za autorskie przygotowanie prezentacji nagrodzono cztery:

- pierwsze miejsce zajęła dr hab. Beata Bieszk-Stolorz (Uniwersytet Szczeciński) za poster nt. Wykorzystanie testu Graya do oceny wpływu płci na formę wyjścia z bezrobocia,
- drugie miejsce – dr hab. prof. UMK Ewa Wędrowska, dr Joanna Muszyńska, dr Jarosław Oczki (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu) za poster nt. Dekompozycja nierówności dochodowych polskich rodzin,
- trzecie miejsce – ex aequo:
mgr inż. Beata Śpiewak (Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie) za poster nt. Zastosowanie wybranych metod estymacji odpornej: Hubera i Baardy'go w modelowaniu rynku nieruchomości,
dr Krzysztof Dmytrów (Uniwersytet Szczeciński) za poster nt. Wpływ wag w metodach TOPSIS i TMAL na długość czasu kompletacji produktów – analiza symulacyjna.

Teksty referatów i posterów po pozytywnych recenzjach zostaną opublikowane w zeszycie naukowym *Studia i Prace WNEiZ US „Metody ilościowe w ekonomii”* oraz w *Folia Oeconomica Stetinensia*.